Communications numériques

Transmission en bande de base

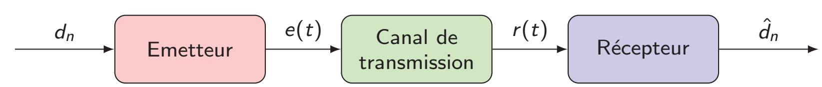
Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - $2^{\text{ème}}$ année
2018-2019

Sommaire

Sommaire

Chaîne de transmission idéale : rappel

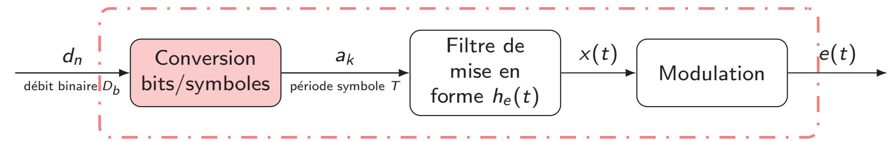


Chaîne de transmission idéale : emetteur

Emetteur : transformer le signal numérique d_n en un signal physique $e(t)$ (onde électromagnétique, signal électrique, etc...) qui puisse être transmis sur le canal de transmission

- Transmettre le maximum de données avec une fiabilité maximale
- S'adapter au canal de transmission utilisé

Emetteur : différentes étapes

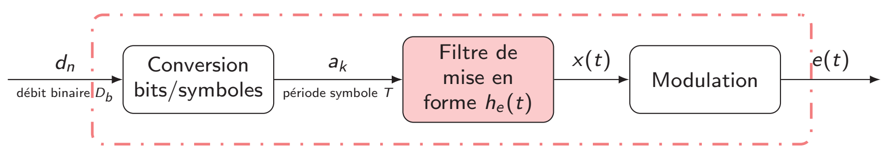


Emetteur

Conversion bits/symboles (transcodage) :

- Modification de la taille de l'alphabet
- Modification du rythme

Emetteur : différentes étapes

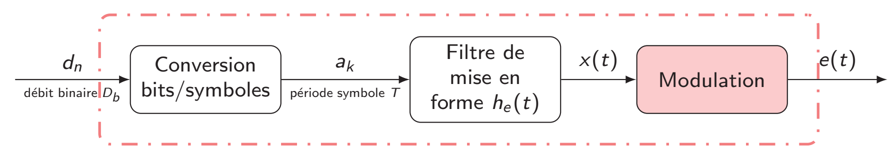


Emetteur

Mise en forme :

- Transformation du signal numérique en un signal physique
- Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

Emetteur : différentes étapes

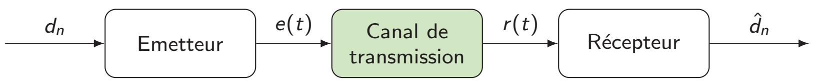


Emetteur

Modulation :

- Adaptation au canal de transmission (bande passante)
- Large choix de possibilités : dépend de la puissance, de la probabilité d'erreur acceptable...

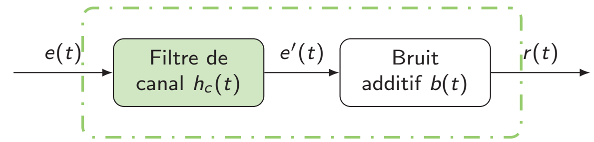
Chaîne de transmission idéale : canal



Canal de transmission : câbles coaxiaux, paires torsadées, réseau hertzien, infrarouge, fibres optiques,....

- Proprietés physiques différentes selon le canal utilisé : bande passante, débit maximal, etc...
- Eventuellement source d'erreurs (bruit, perte de données, etc...)

Canal : différentes étapes

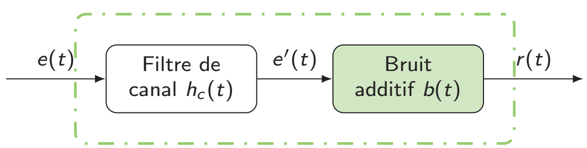


Canal de transmission

Filtre de canal ayant pour fonction de transfert $H_c(f)$

- Dépend à priori de la fréquence : notion de **bande passante** du canal
- Canal idéal : $H_c(f)$ constant dans la bande passante

Canal : différentes étapes



Canal de transmission

Bruit additif $b(t)$

- Souvent supposé bruit blanc additif gaussien indépendant du signal

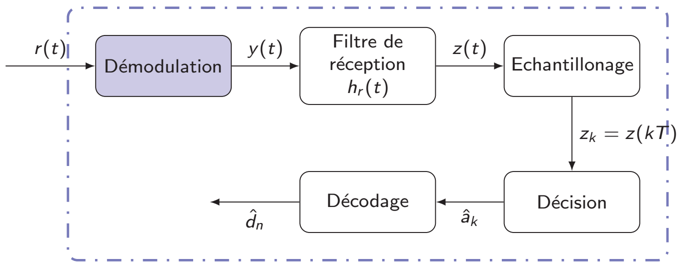
$$\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$$

Chaîne de transmission idéale : récepteur

Récepteur : transformer le signal physique reçu $r(t)$ pour retrouver le signal numérique envoyé $\hat{d}_n$

- Echantillonnage, détection, élimination du bruit
- Parfois difficile s'il y a eu des erreurs de transmission

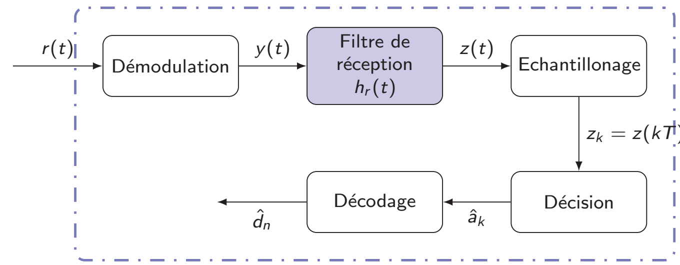
Récepteur : différentes étapes



Récepteur

Démodulation : inverse de l'étape de modulation

Récepteur : différentes étapes

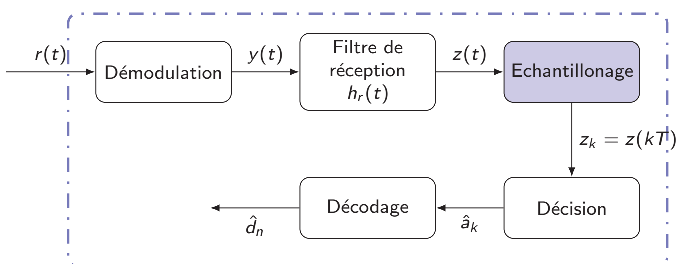


Récepteur

Filtre de réception :

- Adapté au filtre de mise en forme utilisé lors de l'émission
- Vise à minimiser les interactions entre symboles et à maximiser le rapport signal sur bruit

Récepteur : différentes étapes

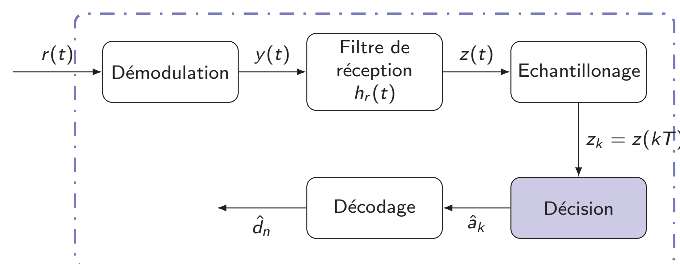


Récepteur

Echantillonage :

- Transformation du signal physique en signal discret
- Nécessite une synchronisation sur le temps d'horloge

Récepteur : différentes étapes

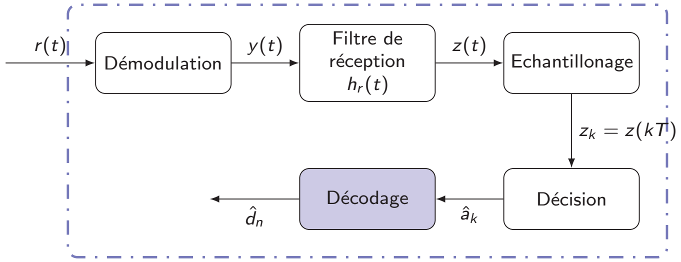


Récepteur

Décision :

- A partir des valeurs échantillonnées, on retrouve les symboles émis
- Sensible au bruit ajouté par le canal

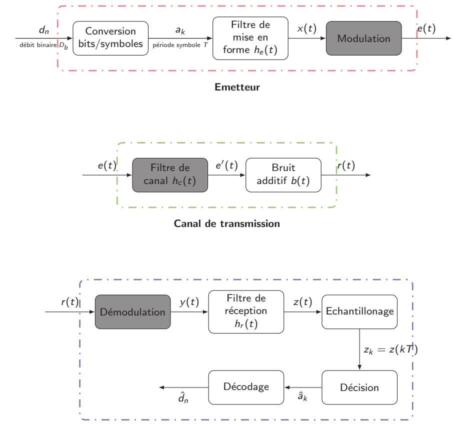
Récepteur : différentes étapes



Récepteur

Décodage : on transforme les symboles détectés en bits d'information

Hypothèses



On s'interesse ici à la transmission en bande de base :

- Pas d'étape de modulation/démodulation
- Transmission des signaux tels quels, dans la bande de fréquence originale

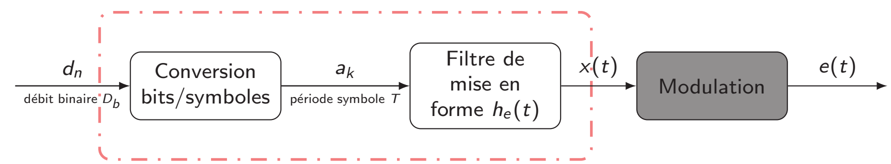
On supposera aussi que le canal utilisé est idéal, invariant, et de gain unitaire

$$H_c(f) = 1$$

Sa bande passante est donc supposée infinie.

Sommaire

Codage en ligne

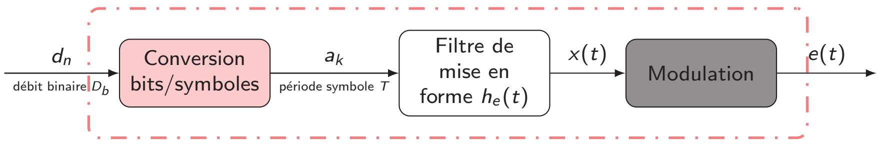


Codage en ligne

Codage en ligne :

- Toutes les étapes en bande de base, avant l'étape de modulation
- But : donner de bonnes propriétés au signal physique créé (largeur de bande, raies ou annulations du spectre à certaines fréquences, etc...)

Emetteur : conversion bits/symboles

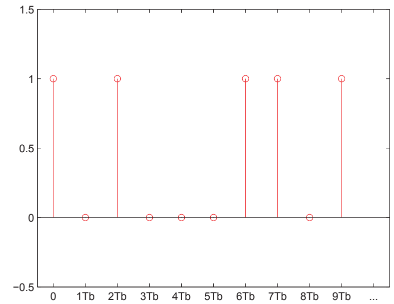


Emetteur

Conversion bits/symboles (transcodage) :

- Modification de la taille de l'alphabet
- Modification du rythme

Débit binaire



- Entrée : signal binaire initial d_n

$$d = 1010001101 \cdots$$

- Un bit émis toutes les T_b secondes. T_b est la période binaire.
- **Débit binaire :**

$$\boxed{D_b = \frac{1}{T_b} \text{ (bits/seconde)}}$$

Le débit binaire D_b correspond au nombre de bits envoyés par seconde.

$$d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \delta(t - nT_b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \delta\left(t - \frac{n}{D_b}\right)$$

Transcodage : conversion bits/symboles

- Principe : remplacer les bits ou des groupements de bits par des symboles
- Idée : passer de deux valeurs possibles (0 ou 1) à M valeurs possibles
- Plusieurs façons de procéder :
  - Codage par dictionnaire : regrouper les bits m par m et associer un symbole à chaque groupement
  - Codage par diagramme d'états
  - Codage par équation linéaire

Codage par dictionnaire

- **m est le nombre de bits par symbole**
- Regrouper les bits m par m et associer un symbole à chaque groupement
- On peut définir un dictionnaire de M symboles.

$$\boxed{M = 2^m} \qquad \boxed{m = \log_2 M}$$

- **M est le nombre de symboles du dictionnaire et est appelé valence**
- Exemple avec $m = 1$:

$$1010001101 \longrightarrow 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \longrightarrow 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1$$

- Exemple avec $m = 2$:

$$1010001101 \longrightarrow 10\ \ 10\ \ 00\ \ 11\ \ 01 \longrightarrow 2\ \ 2\ \ 0\ \ 3\ \ 1$$

Codage par dictionnaire

- Plusieurs façons d'attribuer un symbole a_k à chaque groupe de m bits
  - Codage M-aire unipolaire :
  $$a_k \in \{0, 1, \cdots, M-1\}$$
  - Codage M-aire antipolaire :
  $$a_k \in \{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\} \text{ (uniquement les valeurs impaires)}$$
- Exemple avec $m = 2$:
$$10 \;\; 10 \;\; 00 \;\; 11 \;\; 01 \longrightarrow 2 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 1 \text{ (unipolaire)}$$
$$10 \;\; 10 \;\; 00 \;\; 11 \;\; 01 \longrightarrow 3 \;\; 3 \;\; -3 \;\; 1 \;\; -1 \text{ (antipolaire)}$$

Exemples

- Codage binaire unipolaire

d_n	a_k
0	0
1	1

- Codage binaire antipolaire

d_n	a_k
0	-1
1	1

Exemples

- Codage quaternaire antipolaire (ou 2B1Q)

$d_n d_{n+1}$	a_k
00	-3
01	-1
11	1
10	3

codage de Grey : un bit de différence entre chaque état

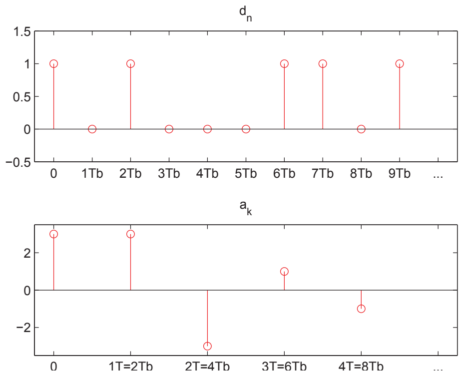
Rapidité de modulation

- Si on regroupe les bits m par m, on transmet m fois moins vite.
- **On appelle période symbole T la période d'émission des symboles a_k**

$$\boxed{T = mT_b = \log_2 M \; T_b = \frac{\log_2 M}{D_b}}$$

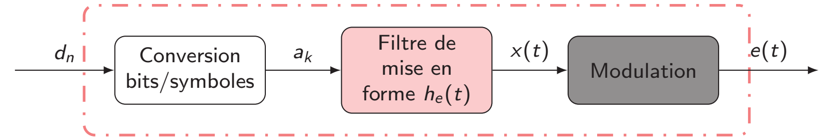
- On a un nouveau signal
$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$

Exemple : codage 2B1Q



$$10 \quad 10 \quad 00 \quad 11 \quad 01 \longrightarrow 3 \quad 3 \quad -3 \quad 1 \quad -1$$

Emetteur : mise en forme



Emetteur

Mise en forme :

- Transformation du signal numérique en un signal physique
- Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

Mise en forme

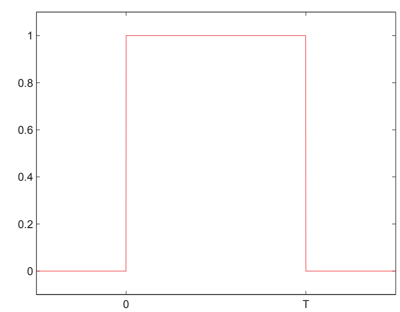
- Entrée : suite de symboles M-aires a_k. Un symbole émis toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$

- Principe : associer un signal physique $x(t)$ à cette suite de symboles en convoluant $a(t)$ par la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ d'un filtre de mise en forme (aussi appelé filtre d'émission).
- Codes à formant : même filtre de mise en forme pour tous les symboles

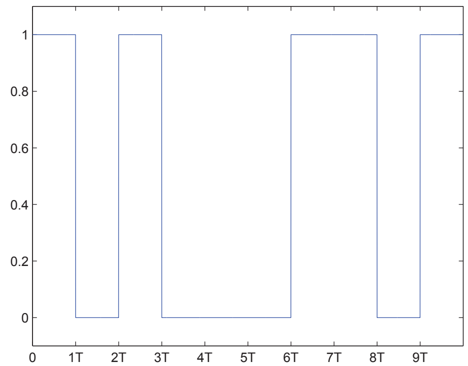
$$x(t) = a(t) * h_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)$$

Filtre NRZ (non retour à zéro)



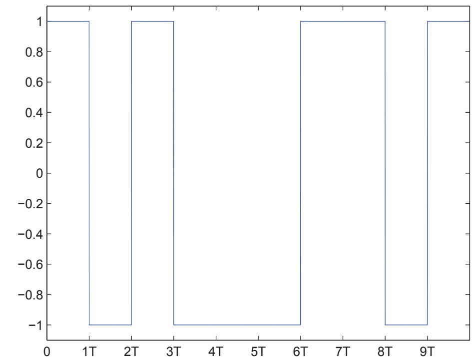
$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : Codage binaire unipolaire NRZ



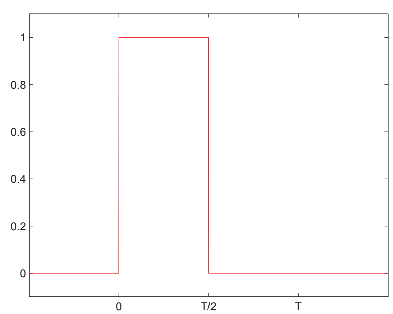
$$1010001101 \longrightarrow 1010001101$$

Exemple : Codage binaire antipolaire NRZ



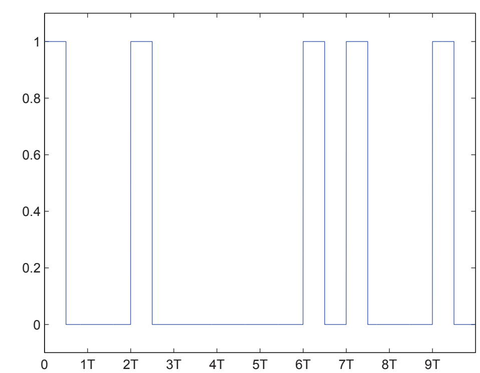
$$1010001101 \longrightarrow 1\text{-}11\text{-}1\text{-}1\text{-}111\text{-}11$$

Filtre RZ (retour à zéro)



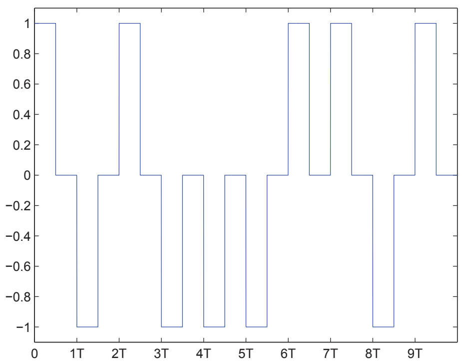
$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : Codage binaire unipolaire RZ



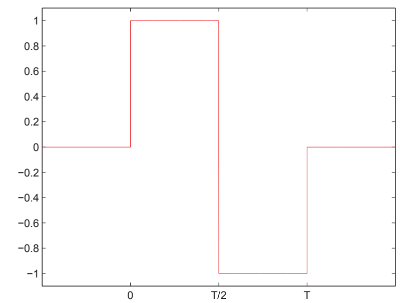
$$1010001101 \longrightarrow 1010001101$$

Exemple : Codage binaire antipolaire RZ



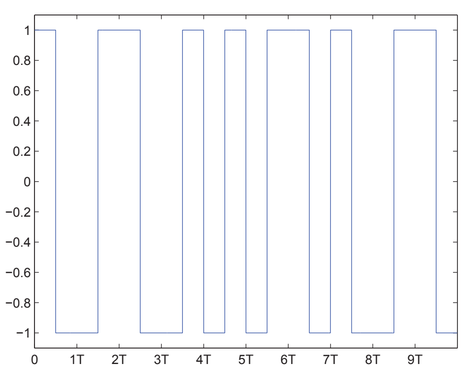
$$1010001101 \longrightarrow 1\text{-}11\text{-}1\text{-}1\text{-}111\text{-}11$$

Filtre biphase Manchester



$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : Codage binaire antipolaire Manchester



$$1010001101 \longrightarrow 1\text{-}11\text{-}1\text{-}1\text{-}111\text{-}11$$

Bilan

Notions importantes

- D_b : débit binaire
- T : période symbole
- m : nombre de bits par symbole
- M : valence = nombre de symboles du dictionnaire

Emission en bande de base

- 3 dictionnaires privilégiés : binaire unipolaire, binaire antipolaire, 2B1Q
- 3 filtres d'émission : NRZ, RZ, biphase Manchester

Notion d'énergie

- Comment évaluer l'énergie totale du signal en bande de base $x(t)$?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) \right|^2 dt$$

- Si le support temporel de $h_e(t)$ est égal à T, on a :

$$E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |h_e(t - kT)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 E_{h_e}$$

- Problème : on ne connait pas les a_k a priori car ils sont aléatoires !
- Solution : au lieu de définir une énergie totale, on va définir une **énergie moyenne**

Energie moyenne par symbole

- L'énergie correspondant à l'émission d'un seul symbole a_i est

$$E_{a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} |a_i h_e(t)|^2 dt = |a_i|^2 E_{h_e}$$

- Si l'on suppose que tous les symboles du dictionnaire sont équiprobables, l'énergie moyenne par symbole peut donc être définie comme

$$\boxed{E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} E_{a_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}}$$

- **L'énergie moyenne par symbole E_{sym} correspond à l'énergie moyenne nécessaire pour envoyer un symbole**

Energie moyenne par bit

- Comme un symbole correspond à $m = \log_2 M$ bits, on peut aussi définir l'énergie moyenne par bit comme

$$\boxed{E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}}$$

- **L'énergie moyenne par bit E_{bit} correspond à l'énergie moyenne nécessaire pour envoyer un bit**

Exemples

- Exemple : dictionnaire binaire antipolaire $a_k \in \{-1, +1\}$

$$E_{sym} = E_{bit} = \frac{1}{2}((-1)^2 + (1)^2) E_{h_e} = E_{h_e}$$

- Exemple : dictionnaire 2B1Q $a_k \in \{-3, -1, +1, +3\}$

$$E_{sym} = \frac{1}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2) E_{h_e} = 5 E_{h_e}$$

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 4} = \frac{5}{2} E_{h_e}$$

Notion de puissance

- Chaque symbole est émis durant une période T, donc on peut définir la puissance moyenne totale du signal $x(t)$ comme

$$\boxed{P_x = \frac{E_{sym}}{T}}$$

- De la même façon, on peut définir la puissance moyenne totale du signal $x(t)$ comme

$$\boxed{P_x = \frac{E_{bit}}{T_b} = E_{bit}\ D_b}$$

- **La puissance émise moyenne P_x correspond à la puissance moyenne nécessaire pour envoyer un signal en bande de base**

Densité spectrale de puissance

- Le signal $x(t)$ est un signal aléatoire dont l'aspect fréquentiel doit donc être étudié grâce à une densité spectrale de puissance
- Il correspond au filtrage du signal aléatoire $a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(t-kT)$ par un filtre de fonction de transfert $H_e(f)$, sa densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ vérifie donc :

$$\Gamma_x(f) = |H_e(f)|^2 \Gamma_a(f)$$

- Si les symboles sont supposés équiprobables et indépendants, on a :

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Densité spectrale de puissance (cas antipolaire)

- Si l'on utilise un dictionnaire antipolaire, on a $\mu_a = 0$ et donc

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}$$

- Finalement la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ vaut

$$\Gamma_x(f) = \Gamma_a(f)|H_e(f)|^2$$

$$\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|H_e(f)|^2$$

- Elle est donc exactement proportionnelle au module au carré du module de la fonction de transfert du filtre de mise en forme !

Densité spectrale de puissance (cas antipolaire)

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|H_e(f)|^2}$$

- **La densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ correspond à la répartition de la puissance du signal $x(t)$ en fonction de la fréquence**
- Le filtre de mise en forme utilisé conditionne la forme de la DSP : en particulier, lorsque l'on utilise un filtre NRZ, RZ ou biphase Manchester, on obtient un signal en bande de base, où la majorité de la puissance est répartie dans la bande $[-B\ ,\ +B]$ où B est la largeur de bande du signal.
- Comme nous le verrons en Travaux Pratiques, à débit binaire constant, le dictionnaire et le filtre utilisés impactent directement la largeur de bande du signal

Liens entre les notions de puissance (cas antipolaire)

- Nous avons défini *avec les mains* la puissance moyenne totale P_x du signal $x(t)$ comme étant :

$$P_x = \frac{E_{sym}}{T}$$

- D'un autre côté, nous savons que par définition, on a :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$$

- Ces deux expressions sont-elles compatibles ?

Liens entre les notions de puissance (cas antipolaire)

Formule 1 : $P_x = \frac{E_{sym}}{T}$

- En utilisant la définition de E_{sym}

$$P_x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e} \times \frac{1}{T}$$

- Comme les symboles ont une moyenne nulle,

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 = \sigma_a^2$$

- Finalement on a :

$$P_x = \frac{\sigma_a^2}{T} E_{h_e}$$

Liens entre les notions de puissance (cas antipolaire)

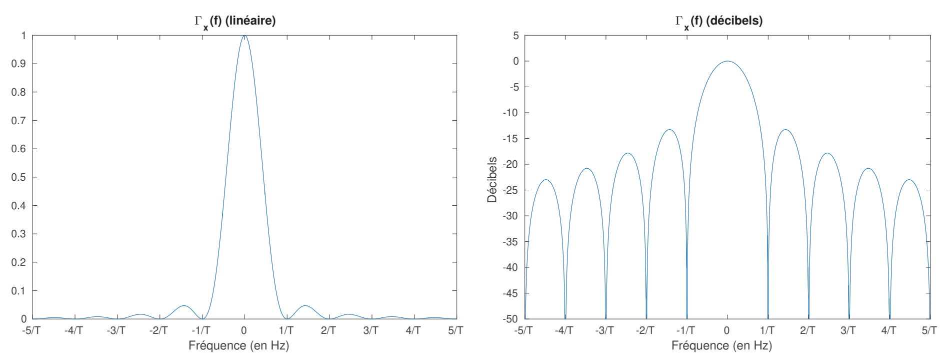
Formule 2 : $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$

- On a $\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|H_e(f)|^2$ donc

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a^2}{T}|H_e(f)|^2 df \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T} E_{h_e} \end{aligned}$$

- Les deux définitions sont donc parfaitement cohérentes !

DSP : filtre NRZ

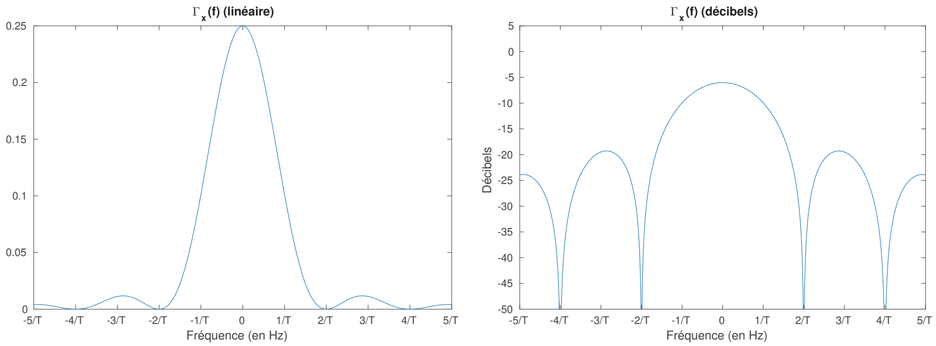


Filtre NRZ

$$\boxed{B_{NRZ} \approx \frac{1}{T}}$$

Ici : $D_b = 1$ bit/seconde, $M = 2$, dictionnaire antipolaire

DSP : filtre RZ

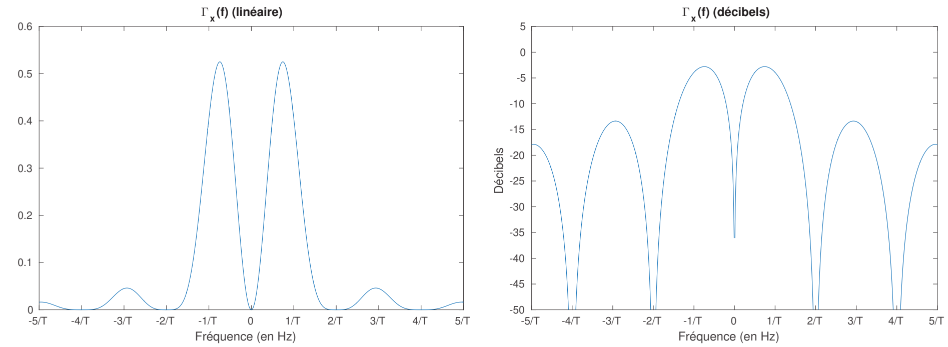


Filtre RZ

$$\boxed{B_{RZ} \approx \frac{2}{T}}$$

Ici : $D_b = 1$ bit/seconde, $M = 2$, dictionnaire antipolaire

DSP : filtre biphase Manchester



Filtre biphase Manchester

$$\boxed{B_{Man} \approx \frac{2}{T}}$$

Ici : $D_b = 1$ bit/seconde, $M = 2$, dictionnaire antipolaire

DSP des codes en ligne : conclusion

- Dictionnaire antipolaire :

$$\boxed{B_{NRZ} \approx \frac{1}{T}}$$

$$\boxed{B_{RZ} \approx \frac{2}{T}}$$

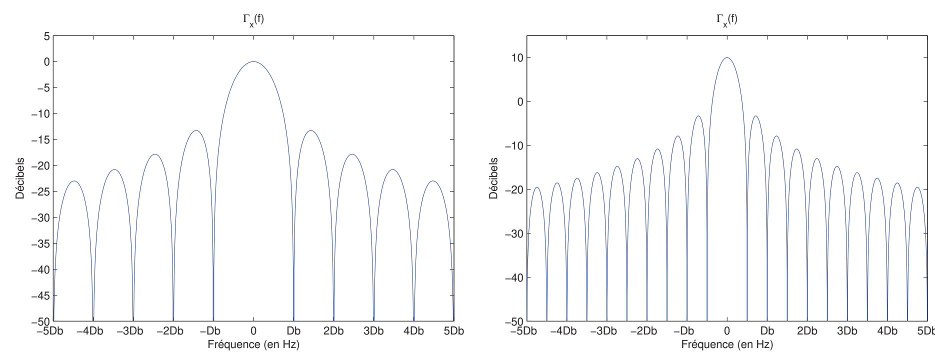
$$\boxed{B_{Manchester} \approx \frac{2}{T}}$$

- Comme $T = \dfrac{log_2 M}{D_b}$

$$B_{NRZ} \approx \frac{D_b}{log_2 M} \qquad B_{RZ} \approx \frac{2\ D_b}{log_2 M} \qquad B_{Manchester} \approx \frac{2\ D_b}{\log_2 M}$$

A débit binaire, dictionnaire et filtre constant, lorsque M augmente, la largeur de bande B diminue

Influence de la valence M



Filtre NRZ	Filtre NRZ
$M = 2$	$M = 4$
$B \approx \frac{1}{T} = D_b$	$B \approx \frac{1}{T} = \frac{D_b}{2}$

Ici : $D_b = 1$ bit/seconde, dictionnaire antipolaire

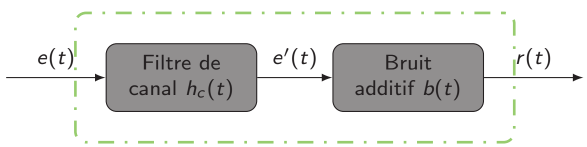
Bilan

Notions importantes

- E_{sym} : énergie moyenne par symbole
- E_{bit} : énergie moyenne par bit
- P_x : puissance moyenne totale
- $\Gamma_x(f)$: densité spectrale de puissance
- B : largeur de bande

Sommaire

Transmission en absence de bruit



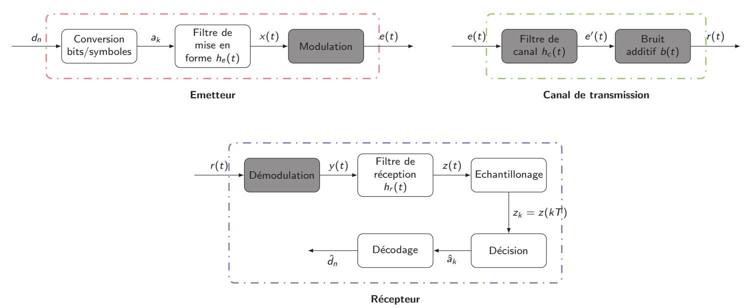
Canal de transmission

Rappel :

- On travaille en bande de base
- On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire $H_c(f) = 1$ (bande passante du canal infinie)
- Ici, on suppose une absence de bruit $b(t) = 0$

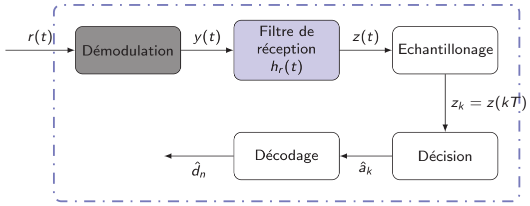
$$r(t) = e(t)$$

Transmission en absence de bruit



$$y(t) = x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)$$

Récepteur : filtre de réception



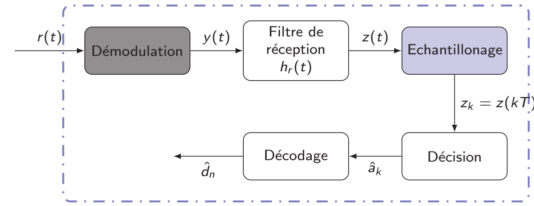
Récepteur

$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\right) * h_r(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) \text{ avec } h = h_e * h_r$$

Récepteur : échantillonnage



Récepteur

Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l h(kT - lT)$$

$$z_k = a_k h(0) + \sum_{l \neq k} a_l h((k - l)T)$$

Interférence entre symboles (IES)

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{l \neq k} a_l h((k - l)T)}_{\text{IES}}$$

- Problème : pour retrouver a_k à partir de z_k, il y a un terme parasite qui dépend des symboles émis avant et après : interférence entre symboles
- Si l'on veut que ce terme soit nul, il faut que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad h(kT) = 0 \text{ pour } k \neq 0 \text{ : condition de Nyquist}$$

Filtres de Nyquist

Filtres de Nyquist : filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ telle que

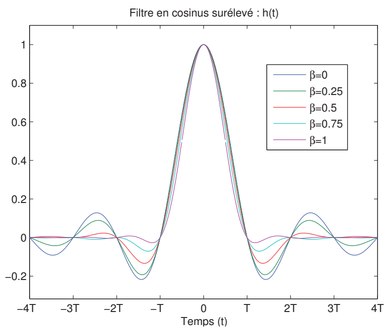
$$\boxed{h(kT) = 0 \text{ pour } k \neq 0 \text{ et } h(0) \neq 0}$$

Exemples :

- Filtres à support temporel borné centré et strictement inférieur à $2T$
- Filtres à support temporel non borné mais s'annulant à tous les multiples de T
  - Exemple important : filtre en cosinus surelevé ($0 \leq \beta \leq 1$)

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - (2\beta t/T)^2}$$

Filtre en cosinus surélevé



$$0 \leq \beta \leq 1$$

- Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1-(2\beta t/T)^2}$$

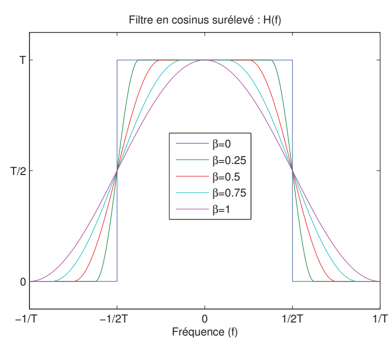
- Support temporel infini

Filtre en cosinus surélevé

Fonction de transfert :

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right)\right] & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Filtre en cosinus surélevé

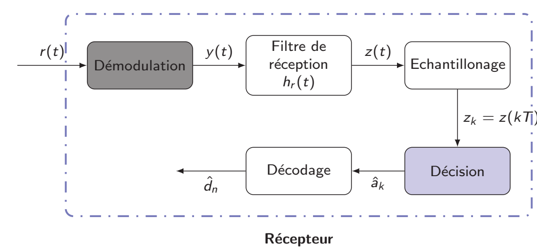


- Bande passante :

$$BP = \frac{1+\beta}{2T}$$

comprise entre $\frac{1}{2T}$ et $\frac{1}{T}$

Décision en absence de bruit

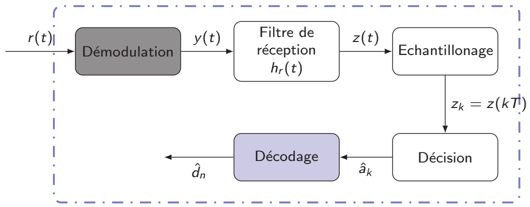


Si l'on suppose que $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist, alors l'IES est nulle et on a donc

$$z_k = a_k h(0)$$

En connaissant $h(0)$ on peut donc estimer $\hat{a}_k = \frac{z_k}{h(0)}$. La probabilité d'erreur symbole est ici nulle car $\hat{a}_k = a_k$

Décodage en absence de bruit

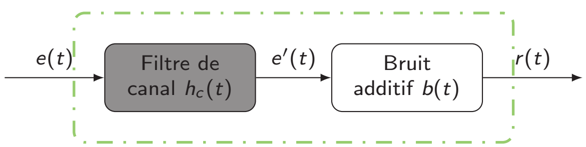


Récepteur

En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver $\hat{d}_n$ à partir de $\hat{a}_k = a_k$ de façon parfaite.
La probabilité d'erreur binaire est nulle car $\hat{d}_n = d_n$.

Sommaire

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

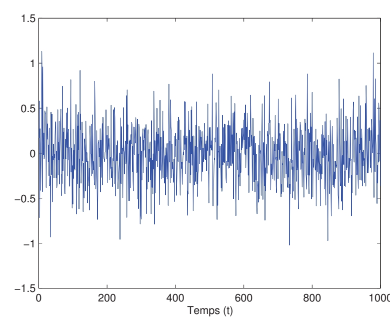


Canal de transmission

Rappel :
- On travaille en bande de base ($e(t) = x(t)$, $r(t) = y(t)$)
- On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire $H_c(f) = 1$ (bande passante du canal infinie)
- Ici, on suppose que $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$
- On parle de canal BBAG (Bruit Blanc Additif Gaussien)

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

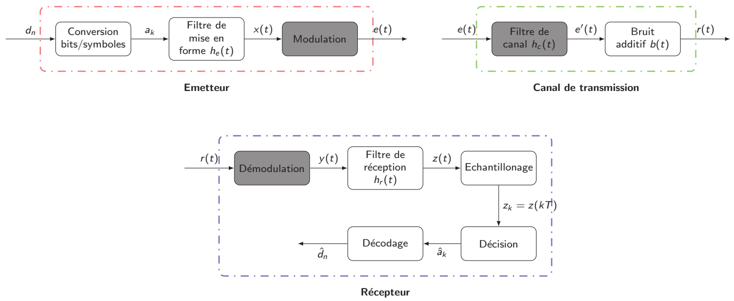
Bruit blanc gaussien



Ici $\sigma^2 = 0.1$

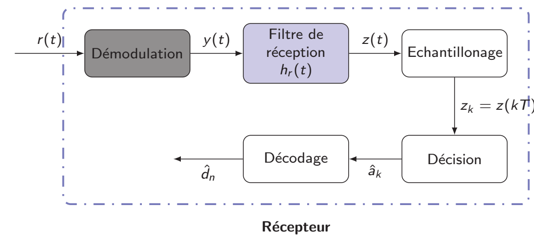
- Signal aléatoire : on ne peut pas savoir quelles valeurs le signal va prendre, donc on utilise des probabilités
- Caractérisation par la moyenne (nulle pour un bruit blanc) et la variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
- A priori, le signal peut prendre n'importe quelle valeur, on sait juste que plus cette valeur est éloignée de la moyenne, moins elle est probable
- Plus la variance est elevée, plus le signal a le droit de prendre des valeurs éloignées de la moyenne

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien



$$y(t) = x(t) + b(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) + b(t)$$

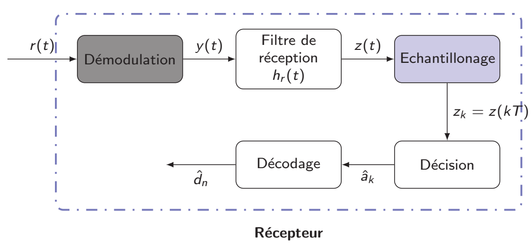
Récepteur : filtre de réception



$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) + n(t) \text{ avec } h = h_e * h_r \text{ et } n = b * h_r$$

Récepteur : échantillonnage



Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l h(kT - lT) + n(kT)$$

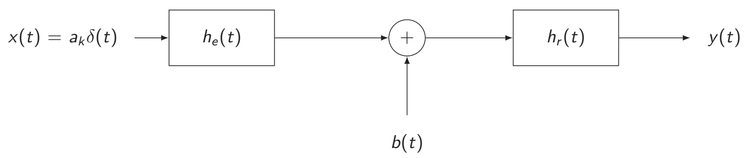
$$z_k = a_k h(0) + \sum_{l \neq k} a_l h((k - l)T) + n(kT)$$

Récepteur optimal

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{l \neq k} a_l h((k - l)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

- Si on veut faire le moins d'erreur possible, il faut que l'IES soit nulle et que l'influence du bruit soit la plus faible possible.
- On a déjà vu que pour que l'IES soit nulle : $h = h_e * h_r$ doit être un filtre de Nyquist
- Comment choisir le filtre de réception $h_r(t)$ pour que l'influence du bruit soit la plus faible possible ?
  - Démonstration dans le TD 3 : maximisation du rapport signal sur bruit $SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$ par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
  - Solution : h_r doit être le filtre adapté à h_e

Filtrage adapté



- Pour maximiser le rapport signal sur bruit en sortie du récepteur il faut

$$H_r(f) = H_e^*(f) \text{ ce qui implique } h_r(t) = h_e^*(-t)$$

- Dans ce cas, le rapport signal sur bruit vaut

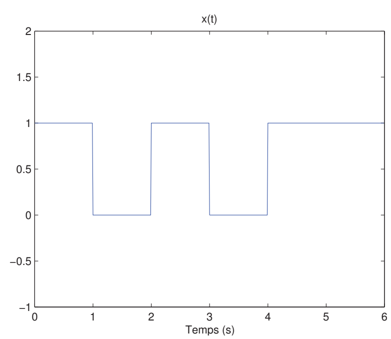
$$SNR = \frac{2E_{h_e}}{N_0}$$

Récepteur optimal : domaine temporel

Dans le domaine temporel :

- Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a $h_r(t) = h_e(-t)$ (on suppose ici que les filtres sont réels)
- On a donc $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$
- On veut que h soit un filtre de Nyquist
- Cas simple : si $h_e(t)$ a un support strictement inférieur à T, alors en prenant $h_r(t) = h_e(-t)$, h est un filtre de Nyquist (ex : filtre NRZ, RZ, biphase Manchester...)

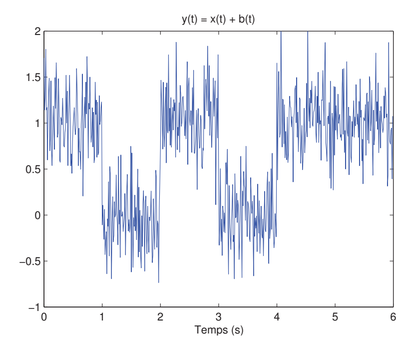
Exemple : filtre NRZ



Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre NRZ avec une période symbole T=1s

$$x(t)$$

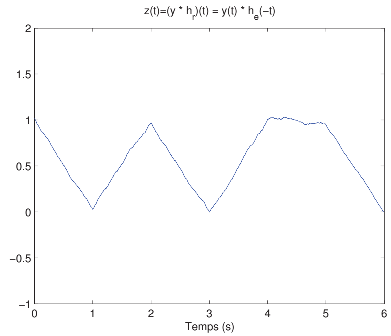
Exemple : filtre NRZ



Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien $b(t)$ de variance σ^2=0.1

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

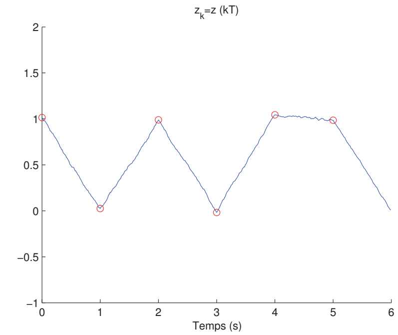
Exemple : filtre NRZ



Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

Exemple : filtre NRZ



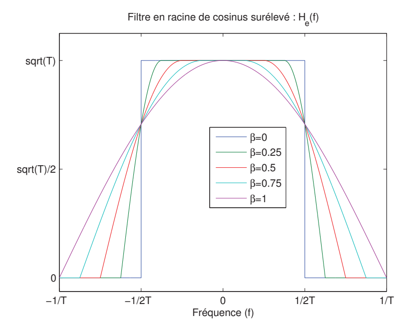
Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole T on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

Récepteur optimal : domaine fréquentiel

Dans le domaine fréquentiel :

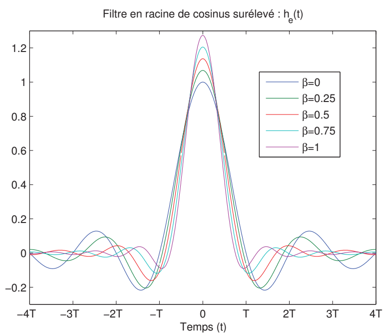
- Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a $H_r(f) = H_e^*(f)$
- On a donc $H(f) = H_e(f)H_r(f) = |H_e(f)|^2$, qui est réel et positif
- Cas simple : partir d'un filtre de Nyquist de réponse fréquentielle $H(f)$ réelle et positive et prendre
$$H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$$

Filtre en racine de cosinus surelevé



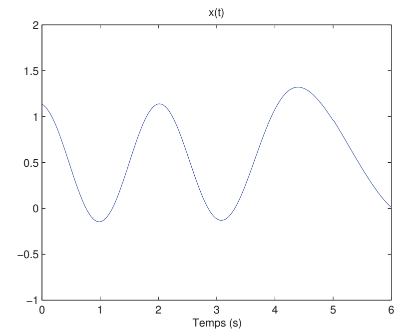
- Dans le domaine fréquentiel : racine de la fonction de transfert d'un filtre en cosinus surelevé
- **Bande passante** $\boxed{BP = \frac{1+\beta}{2T}}$

Filtre en racine de cosinus surelevé



- Dans le domaine temporel : ce n'est plus un filtre de Nyquist (pas d'annulation aux multiples de T)
- En revanche, $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$ est un filtre de Nyquist

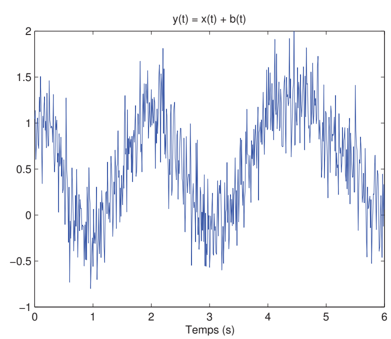
Exemple : filtre RCS



Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre TRC avec une période symbole T=1s

$$x(t)$$

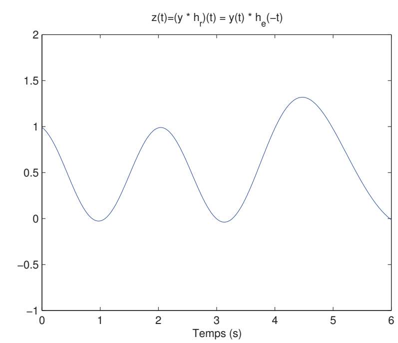
Exemple : filtre RCS



Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien $b(t)$ de variance σ^2=0.1

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

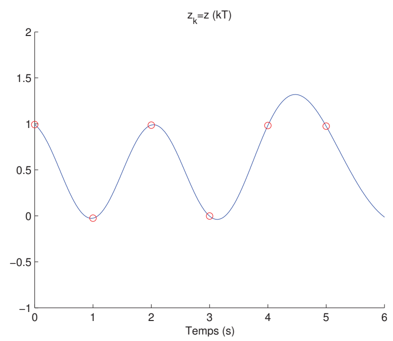
Exemple : filtre RCS



Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

Exemple : filtre RCS



Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole T on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

Récepteur optimal : bilan

Conditions :

- $h_r(t)$ doit être le filtre adapté $h_e(t)$ pour maximiser le SNR en sortie du récepteur

$$h_r(t) = h_e(-t) \qquad H_r(f) = H_e^*(f)$$

- $h = h_e * h_r$ doit être un filtre de Nyquist

$$h(kT) = 0 \text{ pour } k \neq 0 \text{ et } h(0) \neq 0$$

Deux cas simples de filtres formant un récepteur optimal

- $h_e(t)$ de support temporel inférieur à T, et $h_r(t) = h_e(-t)$
- OU $H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$ où $H(f)$ est un filtre de Nyquist

Bilan

Notions importantes

- Filtre de Nyquist
- Interférence entre symboles
- Filtre adapté
- Récepteur optimal

Récepteur optimal : conséquences

Rappel :

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{l \neq k} a_l h((k-l)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

Si le récepteur est optimal (ce qui sera le cas dans la suite du cours) :

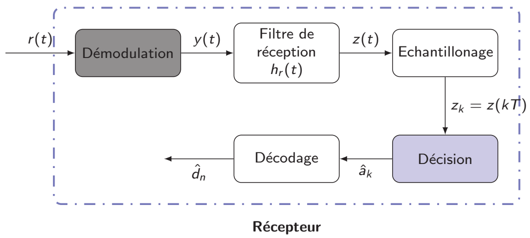
- IES $= 0$
- $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(f) H_e^*(f) df = E_{h_e}$

Donc :

$$z_k = E_{h_e} a_k + n(kT)$$

$\longrightarrow$ Il va falloir estimer $\hat{a_k}$ à partir de z_k, malgré le bruit

Décision



Etape supplémentaire à cause de la présence de bruit : il faut affecter une valeur de symbole à chaque z_k
Exemple : $z_k = 1.26E_{h_e} \rightarrow \hat{a_k} = 1$, $z_k = -0.34E_{h_e} \rightarrow \hat{a_k} = 0$, etc...

Décision par seuil : cas binaire

Idée : utiliser un seuillage pour décider de la valeur de chaque symbole

- Codage binaire antipolaire $a_k = 1$ ou $a_k = -1$ (qu'on suppose équiprobable)
- On a donc $z_k = E_{h_e} + n(kT)$ ou $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$
- $n(kT)$ est aléatoire et gaussien, de moyenne nulle
- Une idée intuitive est de seuiller :
  - si $z_k > 0$ alors $\hat{a_k} = 1$
  - sinon $\hat{a_k} = -1$

Décision par seuil : cas M-aire

Dans le cas de M symboles, on utilise le même principe

- On calcule $\frac{z_k}{E_{h_e}}$ et on regarde quel symbole du dictionnaire est le plus proche (au sens de la distance euclidienne)
- On décide ensuite que $\hat{a_k}$ est ce symbole

Exemple : $M = 4$ et $\frac{z_k}{E_{h_e}} = 1.56 \quad 3.82 \quad 2.10 \quad -2.10$

$$\longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad -3$$

Probabilité d'erreur

Si le bruit est trop important, on risque de faire des erreurs

Probabilité d'erreur par symbole

La probabilité d'erreur symbole P^{err}_{sym} correspond à la probabilité de faire une erreur sur un symbole

$$\boxed{P^{err}_{sym} = p(\hat{a_k} \neq a_k)}$$

Cette erreur sur les symboles se répercute ensuite sur les bits après décodage.

Probabilité d'erreur par bit

La probabilité d'erreur par bit P^{err}_{bit} correspond à la probabilité de faire une erreur sur un bit

$$\boxed{P^{err}_{bit} = p(\hat{d}_n \neq d_n)}$$

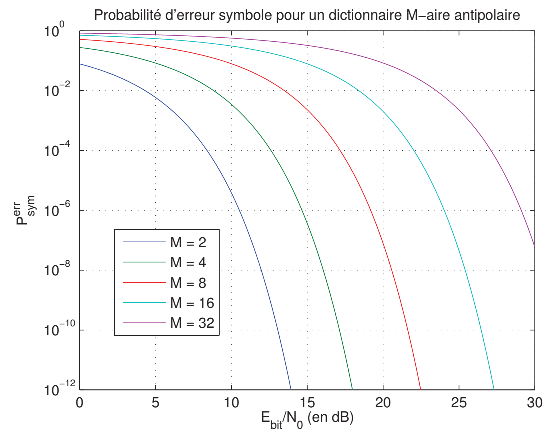
Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)

- En utilisant les propriétés théoriques du bruit $n(t)$, on peut calculer la probabilité de faire une erreur sur un symbole (hors programme)
- Pour un dictionnaire M-aire antipolaire

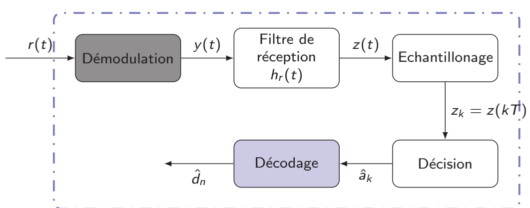
$$P_{sym}^{err} = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

- $Q(.)$ est ici une fonction de Marcum, qui est assimilable à une fonction de répartition pour une variable aléatoire gaussienne
- Pour minimiser P_{sym}^{err}, il faut augmenter E_{bit} donc soit augmenter la puissance émise moyenne P_x, soit diminuer le débit binare D_b
- A $\frac{E_{bit}}{N_0}$ fixé, plus on augmente M, plus la probabilité d'erreur augmente
- La probabilité d'erreur ne dépend pas du filtre de mise en forme

Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)



Décodage



Récepteur

En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver $\hat{d}_n$ à partir de $\hat{a}_k = a_k$. La probabilité d'erreur binaire dépend de la probabilité d'erreur par symbole et du dictionnaire utilisé.

Sommaire

Largeur du bande du signal

- Nous avons vu en TP que les signaux en bande de base ont une largeur de bande que l'on peut écrire :
  - filtre NRZ : $B \approx \frac{1}{T}$
  - filtre RZ : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre biphase Manchester : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre en racine de cosinus surelevé : $B = \frac{1+\beta}{2T}$
- B dépend du type de filtre de mise en forme $h_e(t)$, du débit binaire D_b, et de la taille M de l'alphabet utilisé

Bande passante du canal

- Pour le moment, on a considéré que le canal était idéal et avait une bande passante infinie ($H_c(f) = 1$)
- En réalité, la bande passante du canal BP est limitée et le canal est plutot de la forme

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -BP < f < BP \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ceci est du
  - soit à la nature physique du canal (ex : type de câble, atténuation du signal sur de grandes distances, etc...)
  - soit à des réglementations (ex : bande de fréquence achetée par un opérateur téléphonique, etc...)

Transmission en bande de base

- Afin de transmettre le plus d'information possible on fait en sorte d'utiliser toutes les capacités du canal, mais sans les dépasser !
- Si l'on connait la bande passante du canal (ce qui est en pratique toujours le cas), on va faire en sorte que la largeur du bande du signal en bande de base soit du même ordre

$$B \approx BP$$

- En effet, si $B > BP$ de l'information sera perdue lors de la transmission, et si $B < BP$ alors on a tendance à être plus sensible au bruit
- Connaissant la bande passante du canal de transmission, la largeur de bande va donc être fixée. Ceci va contraintre les choix de dictionnaire, filtres de mise en forme, etc...

Paramètres d'une chaîne de transmission

- D_b : débit binaire (en bits/seconde)
- B : largeur de bande du signal en bande de base (en Hz) (égale à la bande passante BP du canal).
- $P_x = E_{bit} D_b$: puissance émise moyenne (en W)
- P_{bit}^{err} : probabilité d'erreur par bit

On veut D_b le plus grand possible, P_x et P_{bit}^{err} les plus petits possibles, et $B = BP$ est souvent fixe.

Evaluation d'une chaîne de transmission

Efficacité spectrale

$$\boxed{\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{T\ B}}$$

η le plus grand possible : D_b maximal et B minimal

Taux d'erreur binaire

$$\boxed{TEB = \frac{\text{nombre de bits mal détectés}}{\text{nombre total de bits emis}}}$$

NB : P_{bit}^{err} est le TEB quand le nombre total de bits est infini

Dimensionnement d'une chaîne de transmission

- Principe : on a des contraintes sur D_b, B (=BP), P_x et/ou P_{bit}^{err}
- Selon l'application et le type de transmission, on va réaliser des compromis entre ces paramètres
- On va choisir en fonction de ces contraintes le dictionnaire (valence + type de dictionnaire) et les filtres d'émission/réception