Communications numériques

Formulaire de traitement du signal

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2ème année

2018-2019

Nombres complexes

	Forme algébrique	Forme polaire
Définition	$z = x + jy$ x : partie réelle y : partie imaginaire	$z = re^{j\theta}$ r : module θ : argument
Conjugué	$z^* = x - jy$	$z^* = re^{-j\theta}$

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \qquad |z|^2 = z\,z^* \qquad \left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{|z|^2}$$

Formules d'Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Décibels

Echelle linaire X	Echelle en décibels X_{dB}
$X = 10^{\frac{X_{dB}}{10}}$	$X_{dB} = 10\log_{10}(X)$

$$\log_{10}(10^x) = 10x \qquad 10\log_{10}(xy) = 10\log_{10}(x) + 10\log_{10}(y) \qquad 10\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = 10\log_{10}(x) - 10\log_{10}(y)$$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_{dB}	0	3	4.8	6	7	7.8	8.5	9	9.5

Distribution de Dirac

Définition	$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Intégration	$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
Produit	$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$
Produit de convolution	$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Produit de convolution

	Cas continu	**Cas discret**
Définition	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)\, g(\tau) d\tau$	$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m}\, g_m$
Commutativité	$(f * g)(t) = (g * f)(t)$	$(f * g)_n = (g * f)_n$
Distributivité	$f(t) * [g(t) + h(t)] = (f * g)(t) + (f * h)(t)$	$f_n * (g_n + h_n) = (f * g)_n + (f * h)_n$
Associativité	$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t)$	$f_n * (g_n * h_n) = (f_n * g_n) * h_n$

Energie et puissances (domaine temporel)

	Cas continu	**Cas discret**
Energie totale	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x_n \rvert^2$
Puissance moyenne totale	$P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m + 1} \sum_{n=-m}^{m} \lvert x_n \rvert^2$
Puissance moyenne totale (cas périodique)	$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} \lvert x_n \rvert^2$

Transformée de Fourier

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$x(t)$	$X(f)$
Transformée de Fourier inverse $x(t) = \mathcal{TF}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}df$	Transformée de Fourier $X(f) = \mathcal{TF}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}dt$
$\lambda x(t) + \mu y(t)$	$\lambda X(f) + \mu Y(f)$
$x(t) \times y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$X(f) \times Y(f)$
$x(t - t_0)$	$X(f)\ e^{-j2\pi f t_0}$
$x(t)\ e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(-f) = X^*(f)$, $\lvert X(-f)\rvert = X(f)$, $\arg\{X(-f)\} = -\arg\{X(f)\}$
$x(t)$ réel et pair	$X(f)$ réelle et paire
$x(t)$ périodique de période T	$X(f)$ discret défini pour $f = \frac{n}{T}$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\dfrac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\dfrac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$
Signal porte centré de durée L $\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$L\,\mathrm{sinc}(Lf) = \begin{cases} L & \text{si } f = 0 \\ L\frac{\sin(\pi Lf)}{\pi Lf} & \text{sinon} \end{cases}$
Sinus cardinal normalisé $\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$	$\Pi_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Peigne de Dirac $Ш_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

Transformée de Fourier discrète

- N : nombre d'échantillons
- F_s : fréquence d'échantillonnage
- Fréquences observables : $f_k = k\frac{F_s}{N}$ avec $k = 0, \cdots, N-1$
- Résolution en fréquence : $\Delta f = \frac{F_s}{N}$

Transformée de Fourier discrète (TFD)	**Transformée de Fourier discrète inverse**
$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \; e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$	$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \; e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$

Energie et puissances (domaine fréquentiel)

	Signaux déterministes	**Signaux aléatoires**
Energie totale	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$ $\lvert X(f)\rvert^2$: densité spectrale d'énergie	
Puissance moyenne totale		$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$ $\Gamma_x(f)$: densité spectrale de puissance
Sortie d'un filtre $y = x * h$	$\lvert Y(f)\rvert^2 = \lvert H(f)\rvert^2 \; \lvert X(f)\rvert^2$	$\Gamma_y(f) = \lvert H(f)\rvert^2 \; \Gamma_x(f)$

Densités spectrales de puissance usuelles

Signaux	**Densités spectrales de puissance**
Bruit blanc $b(t)$ de moyenne nulle et de variance σ^2	$\Gamma_b(f) = \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
Emission de symboles aléatoires tirés uniformément toutes les T secondes $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(t - kT\right)$	$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ avec μ_a, σ_a^2: moyenne et variance des symboles du dictionnaire