Communications numériques
TD 1 : Rappels de traitement du signal

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2ème année

2018-2019

1 Produit de convolution et Dirac

On définit :

- Un signal d'entrée $a(t)$ défini par :
$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$
avec $T > 0$ et $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$
- Un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ seconde} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de calculer la sortie du filtre $x(t)$ définie par :

$$x(t) = (a * h)(t)$$

1. Tracer $h(t)$.
2. On pose $T = 2$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tracer $a(t)$ et $x(t)$
3. Même question pour $T = 1$ seconde et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. Même question pour $T = 0.5$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Transformée de Fourier

Dans cet exercice on notera $x(t)$ le signal temporel et $X(f)$ sa transformée de Fourier. On rappelle aussi la définition complexe des fonctions trigonométriques :

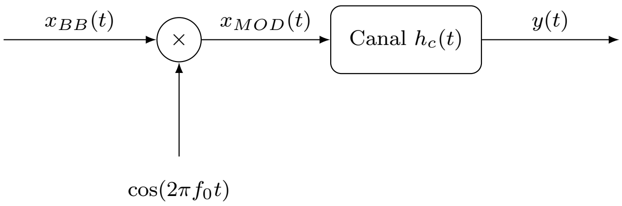
$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

1. Filtrage adapté :
   (a) Montrer que $X^*(f) = \mathcal{TF}\{x^*(-t)\}$
   (b) En déduire que $\mathcal{TF}\{x(t) * x^*(-t)\} = |X(f)|^2$
2. Modulation :
   (a) Montrer que $\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
   (b) En déduire une expression de $\mathcal{TF}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$ en fonction de $X(f)$

3. Fonction porte :
   (a) Calculer et tracer la transformée de Fourier de
   $$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Ce signal est-il en bande de base ? A-t-il une largeur de bande limitée ? Si oui, donner sa valeur.
   (b) Mêmes questions pour le signal
   $$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 Modulation

On considère la chaîne de traitement suivante :

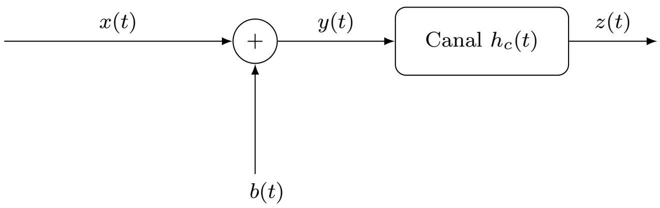


Le signal $x_{BB}(t)$ est un signal en bande de base et de largeur de bande B. Il est d'abord modulé grâce à une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 (avec $f_0 >> B$), puis envoyé sur un canal de transmission modélisé comme un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h_c(t)$. Le signal finalement reçu est noté $y(t)$. La fonction de transfert du filtre h_c est :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer l'énergie totale E_{h_c} du filtre h_c
2. Quelle est la bande passante BP du filtre h_c ?
3. Calculer $x_{MOD}(t)$ puis $X_{MOD}(f)$
4. Quelle est la largeur de bande du signal $x_{MOD}(t)$ en bande modulée ? Faire un dessin.
5. Calculer $Y(f)$ en fonction de $X_{BB}(f)$ et $H_c(f)$. En déduire l'expression de $Y(f)$ en fonction de $X_{BB}(f)$.
6. Que se serait-il passé si l'on avait utilisé un canal ayant une bande passante plus petite ?

4 Rapport signal sur bruit



On considère un signal aléatoire $x(t)$ en bande de base, de puissance moyenne totale $P_x = 10^{-6}$ W et de largeur de bande $B = 100$ kHz. Il est envoyé sur un canal de transmission modélisé comme la succession d'un bruit blanc additif $b(t)$ de densité spectrale de puissance $\frac{N_0}{2}$ avec $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz et d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ ayant comme fonction de transfert :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer l'énergie totale E_{h_c} du filtre h_c

2. Quelle est la bande passante BP du filtre h_c ?
3. Exprimer $z(t)$ en fonction de $x(t)$, $b(t)$ et $h_c(t)$.
4. Identifier le terme lié au signal et le terme lié au bruit. Quelle condition doit vérifier BP pour qu'on ne perde pas d'information ?
5. On suppose dans la suite que $BP = B$. On notera $x' = (x * h_c)$ et $b' = (b * h_c)$.
   (a) Calculer $\Gamma_{x'}(f)$ et en déduire la valeur de la puissance moyenne totale $P_{x'}$
   (b) Calculer $\Gamma_{b'}(f)$ et en déduire la valeur de la puissance moyenne totale $P_{b'}$
   (c) Calculer le rapport signal sur bruit SNR en fonction de P_x, N_0 et B
   (d) Calculer la valeur $SNR|_{dB}$ en décibels

5 Décibels

1. Calculer en décibels les valeurs suivantes (de façon approximative):
   (a) 3×10^{-3}
   (b) $\frac{1}{6}$
   (c) 2.5×10^{-15}
2. Calculer en linéaire les valeurs suivantes (de façon approximative):
   (a) 3 dB
   (b) -120 dB