

Introduction au traitement du signal

Cours 5 : Filtrage dans le domaine fréquentiel

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1^{ère} année
2019-2020

Sommaire

1. Filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel

- 1.1 Liens entre le domaine temporel et fréquentiel
- 1.2 Fonction de transfert et bande-passante
- 1.3 Différents types de filtres
- 1.4 Détermination empirique de la bande passante d'un filtre

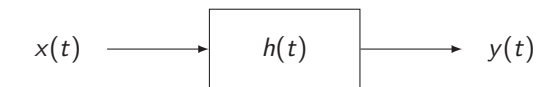
2. Quelques exemples

- 2.1 Exemple 1 : Passe bande
- 2.2 Exemple 2 : Passe bas
- 2.3 Exemple 3 : Passe haut
- 2.4 Utilisations des filtres

Sommaire

Filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel

- 1.1 Liens entre le domaine temporel et fréquentiel
- 1.2 Fonction de transfert et bande-passante
- 1.3 Différents types de filtres
- 1.4 Détermination empirique de la bande passante d'un filtre



Filtrage linéaire : sortie du filtre s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = (h * x)(t)$$

* : produit de convolution

$h(t)$: réponse impulsionnelle

Conséquences dans le domaine fréquentiel

- Si on prend la transformée de Fourier de la relation de filtrage linéaire on a

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{y(t)\} &= \mathcal{TF}\{h(t) * x(t)\} \\ &= \mathcal{TF}\{h(t)\} \times \mathcal{TF}\{x(t)\}\end{aligned}$$

- Ceci nous donne donc une relation fondamentale pour le filtrage linéaire :

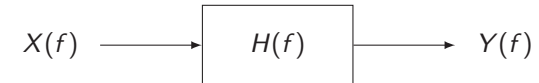
$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Filtrer un signal revient donc à multiplier son spectre par une quantité $H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\}$ et donc à agir sur la répartition de l'énergie sur les fréquences du spectre.

Fonction de transfert

- Un filtre linéaire est donc totalement défini par sa fonction de transfert $H(f)$
- $H(f)$ est une quantité complexe, donc on peut observer son module $|H(f)|$ et sa phase $\arg\{H(f)\}$
- En général $h(t)$ est réel, donc le module $|H(f)|$ est pair et la phase $\arg\{H(f)\}$ est impaire
- Que peut-on dire sur un filtre en observant sa fonction de transfert ?

Filtre linéaire dans le domaine fréquentiel



Dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\} : \text{fonction de transfert du filtre}$$

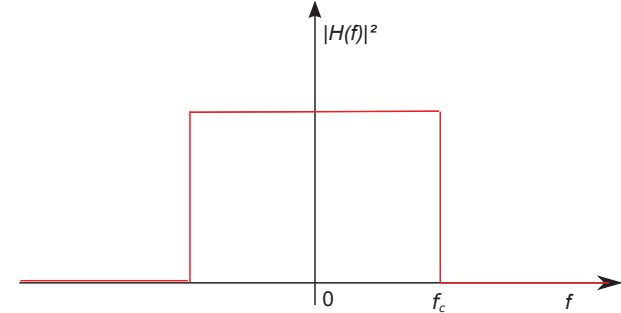
Bande passante

- En regardant le carré du module de la fonction de transfert $|H(f)|^2$ on va pouvoir savoir quel type d'effets le filtre aura
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est élevé seront conservées (ou amplifiées) dans le signal filtré
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est faible seront supprimées (ou atténuées) dans le signal filtré
- De la même façon qu'on a défini une largeur de bande pour un signal, on va définir une bande passante pour un filtre
- On appelle **bande passante** d'un filtrage et on note $BP = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un filtre laisse passer

Filtres idéaux

- ▶ Nous allons définir 4 types de filtres idéaux : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande
- ▶ Chacun de ces filtres a un comportement bien défini et idéal : il laisse passer à la perfection certaines fréquences et en bloque d'autres totalement
- ▶ Dans la réalité, si les filtres ont un comportement qui tend bien vers un des filtres idéaux, il est difficile de bloquer de façon parfaite des fréquences, et il s'agit plutôt d'atténuations que de suppressions

Filtre passe-bas

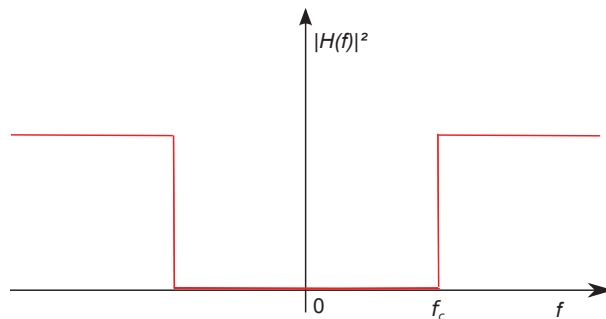


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [0, f_c]$

Filtre passe-haut

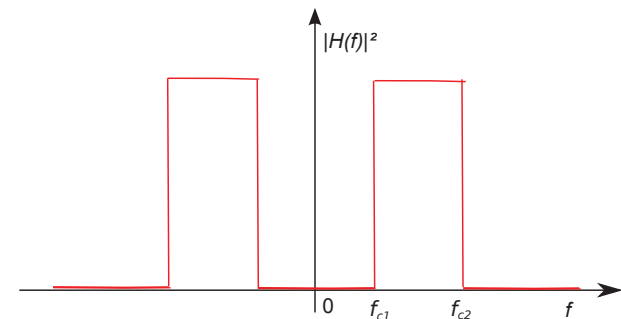


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_c, +\infty[$

Filtre passe-bande

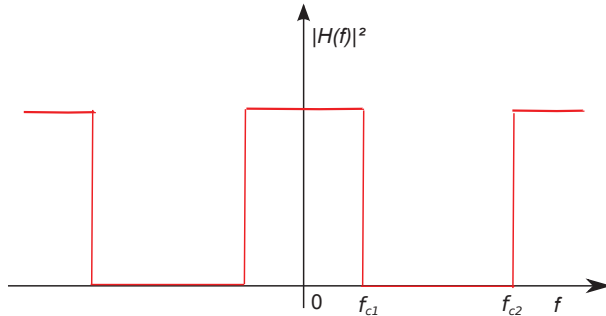


Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_{c1}, f_{c2}]$

Filtre coupe-bande



Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

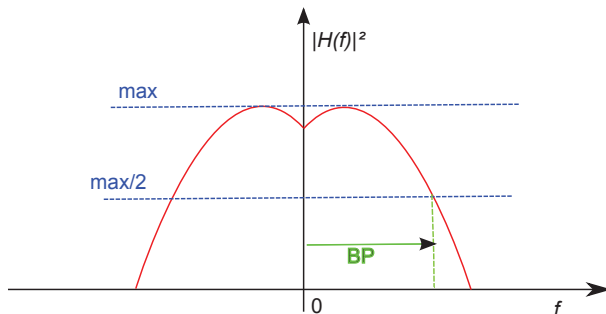
Bande passante $BP = [0, f_{c1}] \cup [f_{c2} + \infty[$

Méthodologie : Gain linéaire

La plupart du temps pour déterminer la bande passante d'un filtre de façon empirique :

1. On détermine quel est son type (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande)
2. On regarde la valeur maximale du module au carré $|H(f)|^2$ que l'on note $\max(|H(f)|^2)$
3. On observe les fréquences correspondant à $\frac{\max(|H(f)|^2)}{2}$, qui définissent les limites de la bande passante
4. Cela signifie que la puissance hors bande passante sera au moins atténuée d'un facteur 2

Méthodologie : Gain linéaire



Méthodologie : Gain en décibels

- Au lieu de travailler directement sur le module au carré $|H(f)|^2$, on convertit parfois le module en décibels :

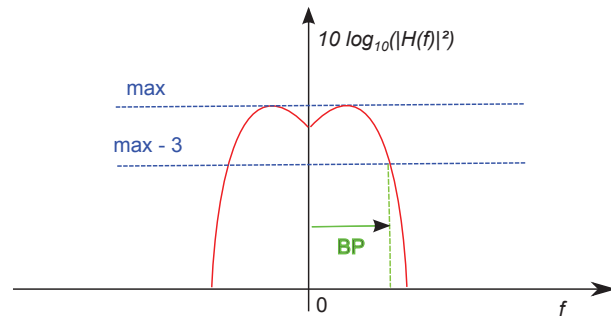
$$[|H(f)|^2]_{dB} = 10 \log_{10} (|H(f)|^2)$$

- Dans ce cas, déterminer les fréquences correspondant à $\frac{\max(|H(f)|^2)}{2}$ revient à retrouver les fréquences f_c telles que :

$$\begin{aligned} [|H(f_c)|^2]_{dB} &= 10 \log_{10} \left(\frac{\max(|H(f)|^2)}{2} \right) \\ &= 10 \log_{10} (\max(|H(f)|^2)) - 10 \log_{10} (2) \\ &= 10 \log_{10} (\max(|H(f)|^2)) - 3 \end{aligned}$$

- On regarde donc les fréquences correspondant au maximum du module au carré (en dB) - 3dB
- C'est pour cela qu'on appelle souvent cette définition de la bande passante : **bande passante à -3 dB**

Méthodologie : Gain en décibels

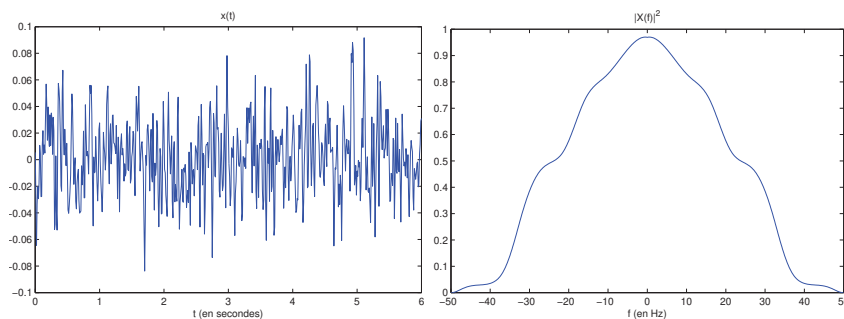


Sommaire

Quelques exemples

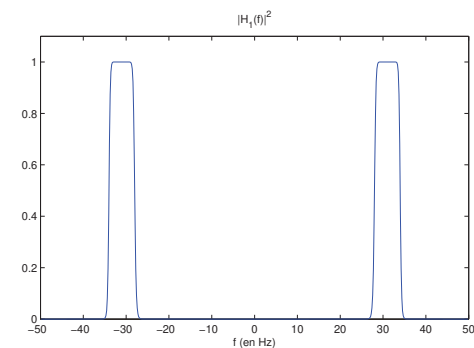
- 2.1 Exemple 1 : Passe bande
- 2.2 Exemple 2 : Passe bas
- 2.3 Exemple 3 : Passe haut
- 2.4 Utilisations des filtres

Contexte



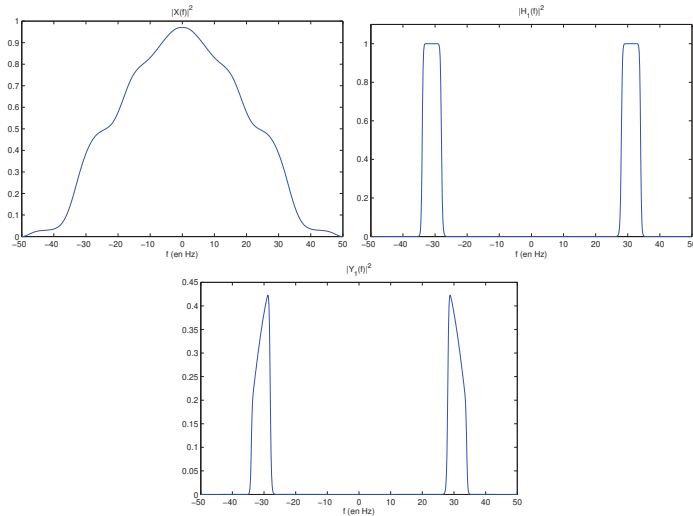
On considère ce signal $x(t)$ ayant une largeur de bande $B = 50$ Hz
On va faire passer ce signal dans différents filtres et observer les conséquences sur le signal, et sur le spectre du signal

Exemple 1 : Passe bande



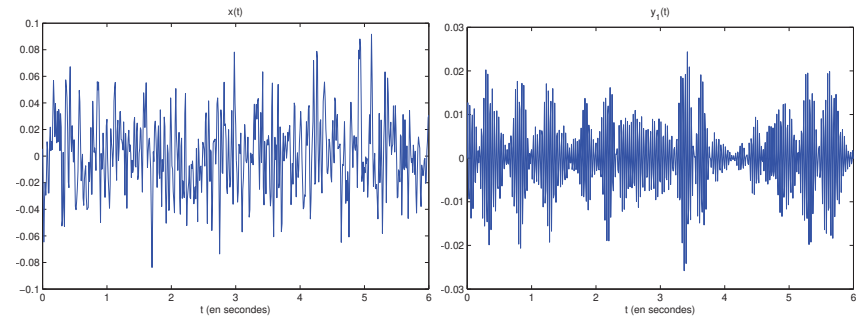
Filtre passe-bande
Bande passante $BP \approx [28, 34]$ Hz

Exemple 1 : Passe bande



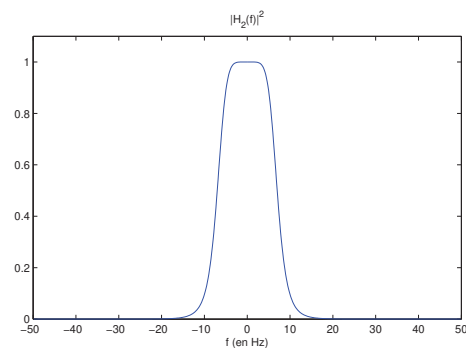
Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

Exemple 1 : Passe bande



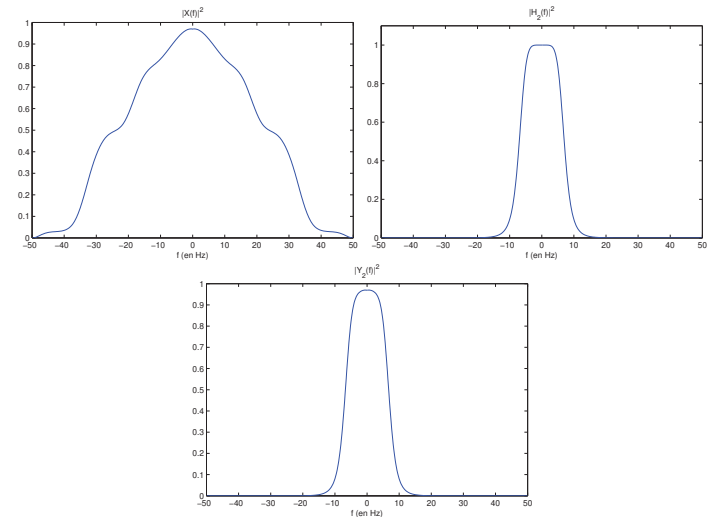
Le signal semble plus structuré : on a enlevé les basses fréquences et les hautes fréquences

Exemple 2 : Passe bas



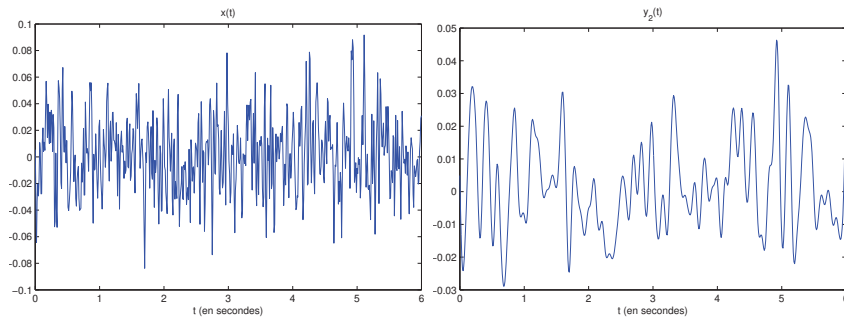
Filtre passe-bas
Bande passante $BP \approx [0, 7]$ Hz

Exemple 2 : Passe bas



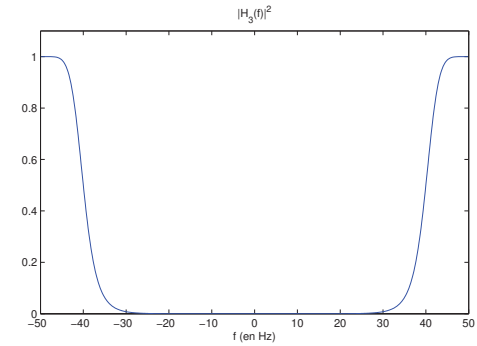
Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

Exemple 2 : Passe bas



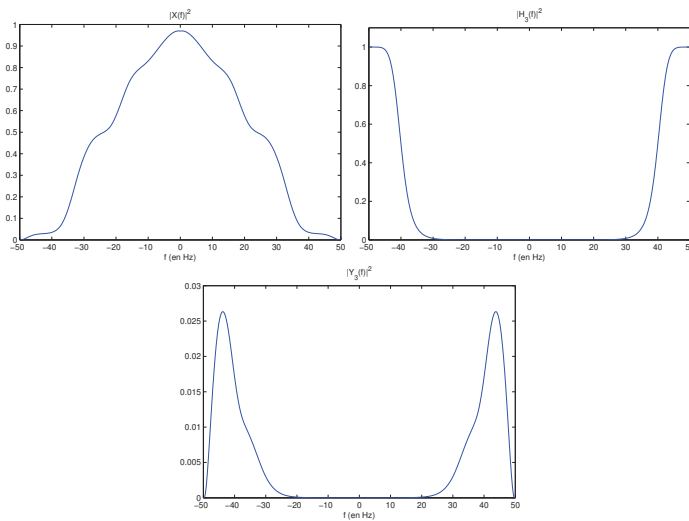
Le signal est légèrement lissé : on a enlevé les hautes fréquences

Exemple 3 : Passe haut



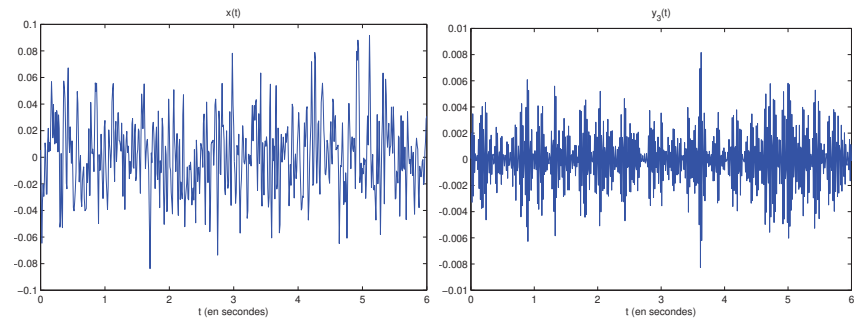
Filtre passe-haut
Bande passante $BP \approx [40, +\infty[$ Hz

Exemple 3 : Passe haut



Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

Exemple 3 : Passe haut



Le signal semble varier de façon plus rapide : on a enlevé les basses fréquences

Utilisations des filtres

- ▶ Passe-bas : Lisser le signal ; débruiter un signal.
- ▶ Passe-haut : Mettre en évidence des événements ponctuels, des discontinuités, des impulsions ; enlever des composantes continues ou des tendances.
- ▶ Passe-bande : Récupérer un signal émis dans une bande de fréquence déterminée ; débruiter un signal dont la largeur de bande est connue.
- ▶ Coupe-bande : Enlever une composante d'un signal de mélange ; réaliser de la séparation de sources.