Introduction au traitement du signal
TD 3 : Filtrage dans le domaine temporel

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - $1^{\text{ère}}$ année

2019-2020

1 Filtrage analogique

On considère :

- Un signal d'entrée $x(t)$ défini pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \; \delta(t - kT)$$

  avec $T > 0$ et $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$

- Un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ seconde} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de calculer la sortie du filtre $y(t)$ définie par :

$$y(t) = (x * h)(t)$$

1. Tracer $h(t)$. Le support temporel de la réponse impulsionnelle est-il borné ou non ?
2. Donner l'expression de $y(t)$ en fonction de $h(t)$, a_k et T
3. On pose $T = 2$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tracer $x(t)$ et $y(t)$
4. Même question pour $T = 1$ seconde et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. Même question pour $T = 0.5$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Produit de convolution

On considère les signaux

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer ces signaux et établir leurs propriétés (continu/discret, support temporel, périodicité, énergie et puissance moyenne)
2. Montrer que

$$\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$$

3 Filtrage numérique

On considère un signal d'entrée causal

$$x[n] = [1 \ , \ 0.5 \ , \ 1 \ , \ -0.5 \ , \ 0 \ , \ 1]$$

On suppose que le premier échantillon correspond à $n = 0$

1. Tracer le signal $x[n]$ et préciser son support temporel
2. On considère un filtre numérique causal de réponse impulsionnelle

$$h[n] = [2 \ , \ 1]$$

   (a) Tracer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre
   (b) Le filtre est-il un filtre FIR ou IIR ?
   (c) On appelle $y[n]$ le signal obtenu à la sortie du filtre. Montrer que

$$\forall n \geq 0 \qquad y[n] = \sum_{m=n-1}^{n} h[n-m] \ x[m]$$

   (d) Calculer et tracer le signal $y[n]$.
3. On considère maintenant un filtre numérique causal vérifiant l'équation :

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Tracer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre
   (b) Le filtre est-il un filtre FIR ou IIR ?
   (c) On appelle $y[n]$ le signal obtenu à la sortie du filtre. Montrer que

$$\forall n \geq 0 \qquad y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m] \ x[m]$$

   (d) Montrer que l'on a

$$\forall n \geq 2 \qquad y[n] - y[n-2] = x[n]$$

   (e) Calculer et tracer les 5 premiers termes du signal $y[n]$