

Introduction au traitement du signal

TD 4 : Etude des signaux dans le domaine fréquentiel

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1^{ère} année

2019-2020

Rappel

On rappelle les formules de trigonométrie suivantes :

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \quad \cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

1 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ et on note respectivement $X(f)$ et $Y(f)$ leurs transformées de Fourier. Montrer que :

1. $\mathcal{TF}^{-1}\{X(f) \times Y(f)\} = x(t) * y(t)$
2. $\mathcal{TF}\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\} = X(f - f_0)$
3. $\mathcal{TF}\{x(t)\cos(2\pi j f_0 t)\} = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$

2 Quelques calculs de transformées de Fourier

Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants et tracer le module de la transformée de Fourier $|X(f)|$:

1. $x(t) = \sin^2(10\pi t)$
2. $x(t) = 1 + \cos^3(20\pi t) + \sin(30\pi t)$
3. $x(t) = 3\cos(20\pi t)\cos(45\pi t)$

3 Autour du signal porte

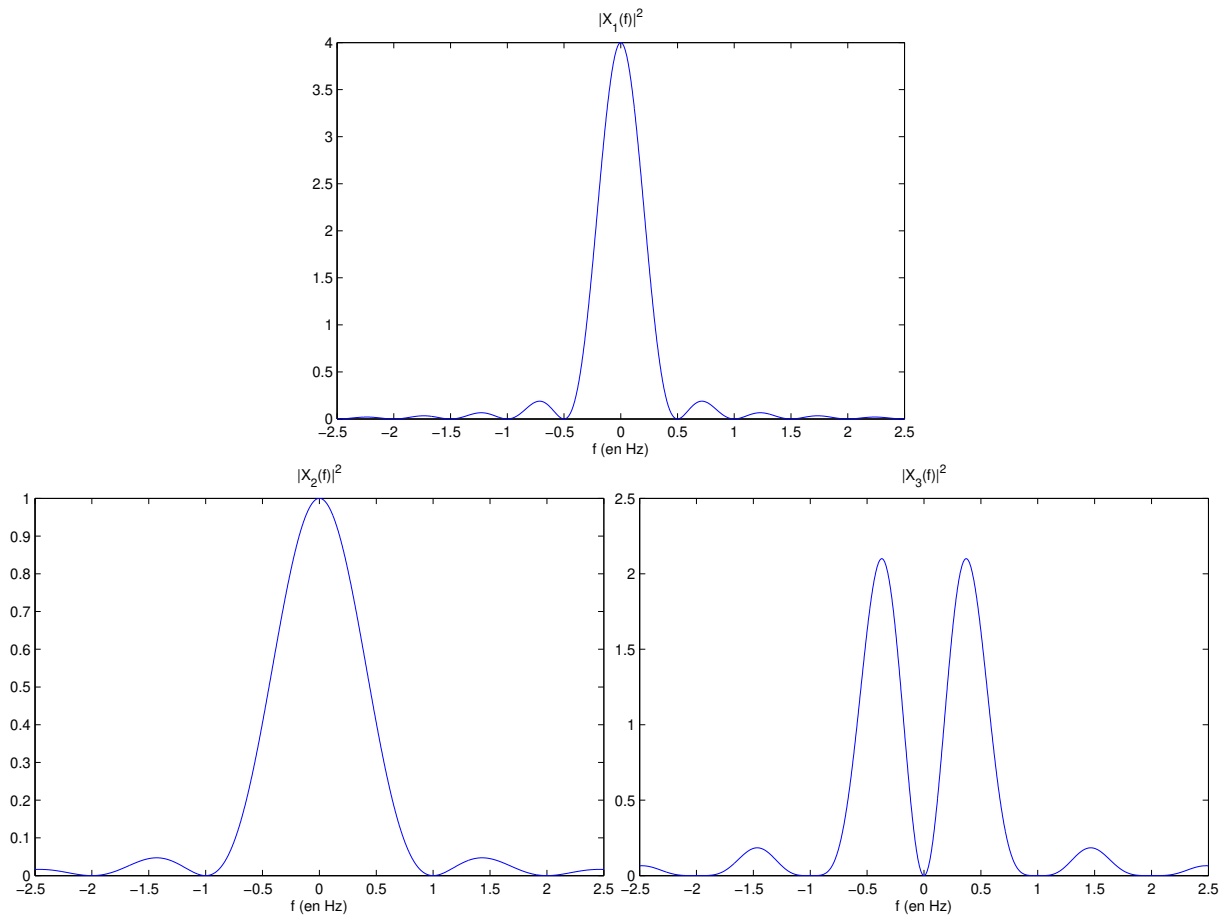
1. Redémontrer que la transformée de Fourier d'un signal porte $\Pi_L(t)$ centré de durée L s'écrit

$$\mathcal{TF}\{\Pi_L(t)\} = L \operatorname{sinc}(Lf)$$

2. On considère les trois signaux suivants (avec $T > 0$) :

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Tracer ces signaux et établir leurs propriétés (continu/discret, support temporel, périodicité, énergie et puissance moyenne)
- (b) En utilisant le résultat de la question 1 et sans refaire les calculs, calculer leurs transformées de Fourier $X_1(f)$, $X_2(f)$ et $X_3(f)$
- (c) On donne ci-dessous les tracés de $|X_1(f)|^2$, $|X_2(f)|^2$, $|X_3(f)|^2$ pour $T = 2$ secondes. Commenter et calculer la largeur de bande des signaux.



4 Signaux à durée limitée

On considère un signal $x(t)$ quelconque à support temporel a priori non borné, que l'on observe sur l'intervalle $[t_0 - \frac{\tau}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}]$. On notera $x_\tau(t)$ ce signal à durée limitée τ .

1. Montrer que $x_\tau(t)$ peut être vu comme le produit du signal original $x(t)$ par un signal porte $\Pi_\tau(t)$ de durée τ dont on précisera l'expression.
2. Calculer $X_\tau(f)$ en fonction de $X(f)$, t_0 et τ .
3. On considère maintenant le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Calculer $X_\tau(f)$ en fonction de τ , t_0 et f_0 .
4. Tracer l'allure de $|X_\tau(f)|^2$ dans le cas où $f_0 \gg \frac{1}{\tau}$

5 Transformée de Fourier discrète

On souhaite échantillonner et observer la transformée de Fourier discrète du signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = \cos(882\pi t) + \sin(320\pi t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier continue de ce signal.
2. Tracer son spectre.
3. Quelle est la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_e que l'on peut utiliser ?
4. On choisit $F_e = 1200$ Hz. La condition de Nyquist est-elle respectée ?
5. On choisit de prendre $N = 600$ échantillons. A quelle durée d'observation cela correspond-il ? Quelle sera la résolution en fréquence ? Lister les fréquences observables sur la TFD. Pourra-t-on observer correctement le spectre grâce à la TFD ? Que va-t-il se passer ?
6. Même question pour $N = 2400$ échantillons