Intelligence Artificielle & Machine Learning pour la modélisation de séries temporelles et de signaux

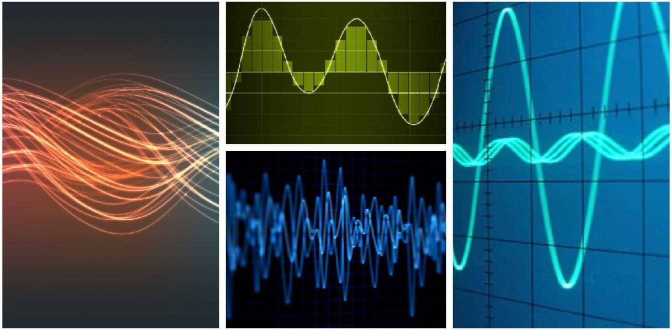
Séance 1 : Quelques notions de traitement du signal

Laurent Oudre
laurent.oudre@ens-paris-saclay.fr

Diplôme ARIA
ENS Paris Saclay
2025-2026

Qu'est-ce qu'un signal ?

Un signal est une quantité observable variant en fonction du temps



Exemples

- Le son issu d'un piano
- La température au sommet de la Tour Eiffel
- Le cours en bourse d'une action
- La tension électrique dans un câble USB
- Données démographiques ou statistiques
- Une onde gravitationnelle

Qu'est-ce qu'un signal ?

- Souvent, un signal correspond à la mesure d'un phénomène physique qui est enregistré grâce à un capteur
  - Son issu d'un microphone
  - Température mesurée grâce à un thermomètre
  - Accélération linéaire mesurée grâce à un accéléromètre embarqué sur smartphone
- Ces capteurs nous permettent de capturer ce qui se passe dans le monde physique en le transformant bien souvent en signal électrique
- Comprendre et analyser ces signaux permet de mieux comprendre le monde qui nous entoure, mais également d'utiliser cette information pour de l'indexation, de la classification...

Signaux continus et discrets

Il existe deux types de signaux temporels :

- **Continu :** signal connu à chaque instant t

  $$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

  t : temps (souvent exprimé en secondes)
  Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

- **Discret :** signal connu uniquement à certains instants $t[n]$

  $$\boxed{x[n] \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

  n : échantillon (sans unité)
  Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

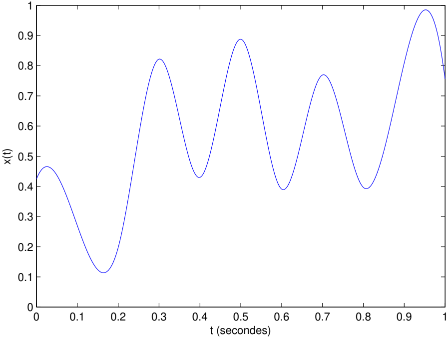
Signaux continus et discrets

En pratique

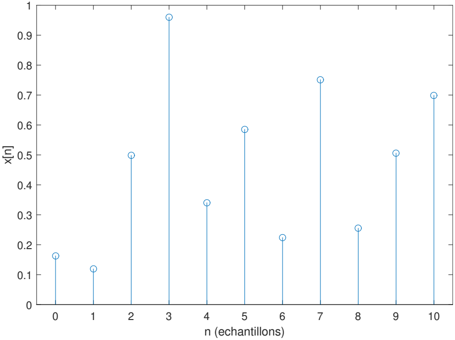
- Les signaux continus $x(t)$ ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc...
- Les signaux discrets $x[n]$ au contraire peuvent être stockés et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs $x[n]$. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs $t[n]$ des instants où l'on connaît le signal.

Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier en projet sont donc des signaux discrets.

Exemples



Signal continu $x(t)$
$t \in [0, 1]$



Signal discret $x[n]$
$n \in [\![0, 10]\!]$

Dans le cours, les signaux discrets seront représentés par des segments terminés par des cercles (cf figure ci-dessus)

Série temporelle vs. signal

- Dans le cours on utilisera invariablement le terme de série temporelle ou de signal (en l'occurrence discret)
- En pratique, les signaux numériques ou séries temporelles sont représentés sous la forme de tableaux de valeurs (ou vecteurs) de longueur N.
- Chaque valeur stockée est appelée **échantillon** (attention : définition différente de celle du ML !). N correspond au nombre d'échantillons.
- On définit alors :
  - L'échantillon n

n	0	1	2	3	4	5	6

  - La série temporelle $x[n]$, correspondant aux valeurs enregistrées

$x[n]$	0.7	0.2	0.8	0.9	0.3	0.2	0.7

  - Le vecteur temps $t[n]$, correspondant aux instants où le signal a été enregistré

$t[n]$	16 :30 :01	16 :30 :23	16 :31 :43	16 :32 :38	16 :33 :06	16 :33 :16	16 :33 :56

Outils transverses

- Avant de parler d'apprentissage, il s'agit donc de savoir ce qui va nous intéresser dans ces séries temporelles, et comment on va être capable de l'extraire des données
- De nombreux outils existent pour cela : c'est le but de cette première séance
- Ces outils parfois très anciens (et qu'on pourrait penser ne plus faire partie de l'IA) permettent en réalité d'éviter beaucoup d'erreurs en visualisant les données et en apportant des visions différentes mais complémentaires :
  - Vision physique
  - Vision statistique

Programme de la séance

- Connaître les différents outils permettant l'exploration et la compréhension des signaux et séries temporelles
- Vision déterministe : transformée de Fourier et filtrage linéaire

Session 1 : Introduction to Signal Processing

Plan du cours

1. Echantillonnage uniforme

2. Transformée de Fourier

3. Transformée de Fourier discrète

4. Filtrage linéaire

Plan du cours

Notion d'échantillonnage

- Pour stocker un phénomène sur un ordinateur, il faut nécessairement choisir un ensemble fini d'instants où l'on va enregistrer le signal. Cette tâche est appelée *échantillonnage* (attention : pas la même signification qu'en ML !)
- Cet échantillonnage peut se faire sur une grille temporelle régulière (ex : une valeur toutes les secondes) ou non régulière (ex : a chaque fois que le sujet clique sur un élement de la page web)
- On parle d'échantillonnage *uniforme* ou *non uniforme*
- Lorsque le phénomène que l'on souhaite numériser est un phénomène physique (onde, température, son...) on utilise le plus souvent un échantillonnage uniforme

Echantillonnage uniforme

- Principe : Convertir un signal continu $x(t)$ en un signal discret $x[n]$ en ne stockant que ce qui se passe à certains instants $t[n]$

$$\boxed{x[n] = x(t[n])}$$

- Dans le cas de l'échantillonnage uniforme on prend une valeur toutes les T_e secondes, où T_e est fixe

$$\boxed{t[n] = nT_e = \frac{n}{F_e}}$$

- T_e est appelée la **période d'échantillonnage** (en secondes)
- $\boxed{F_e = \frac{1}{T_e}}$ est appelée la **fréquence d'échantillonnage** (en Hertz)

Attention !

- La fréquence d'échantillonnage F_e correspond au nombre d'échantillons qui seront enregistrés en 1 seconde : c'est une donnée cruciale lorsque l'on travaille sur une série temporelle
- Dans certains cours, on note parfois F_e de façon différente (par exemple f_e, f_s ou F_s). L'indice s correspond au mot *sampling* en anglais qui veut dire *échantillonnage*

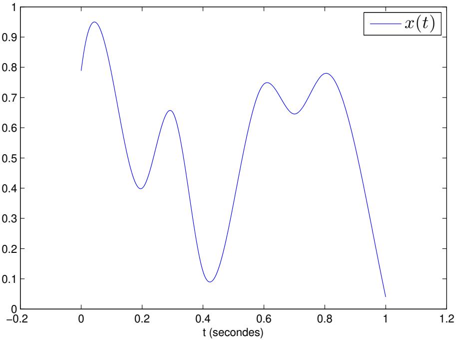
Echantillonnage uniforme

- Si on souhaite échantillonner un signal avec une fréquence d'échantillonnage F_e, on stocke ceci :

Echantillon n	Temps $t[n]$	Valeur stockée $x[n]$
0	0	$x(0)$
1	T_e	$x(T_e)$
2	$2T_e$	$x(2T_e)$
3	$3T_e$	$x(3T_e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

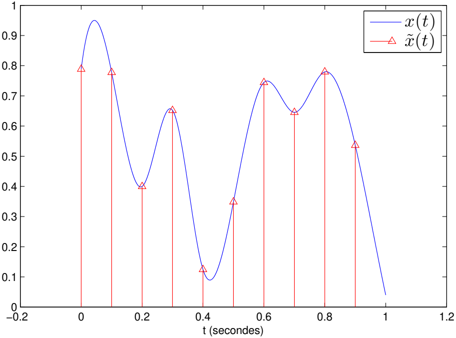
- Moyen mnémotechnique : une seconde de signal correspond à F_e échantillons
- Si on considère un signal d'une durée de d secondes, il faut donc prévoir de stocker $d \times F_e$ échantillons (plus éventuellement les temps correspondant dans un vecteur temps).

Exemple



- Signal continu $x(t)$ défini sur $t \in [0, 1[$

Exemple

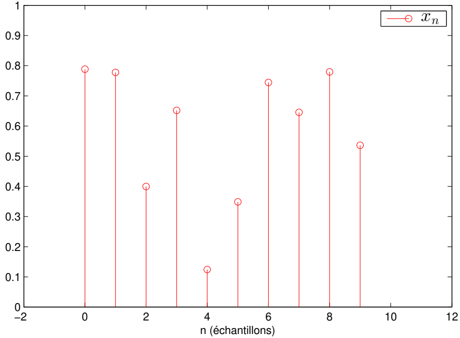


- On prend une valeur toutes les 0.1 secondes en commençant par $t = 0$ et en s'arrêtant à $t = 0.9$:
  - $T_e = 0.1$ secondes
  - $F_e = 10$ Hz
- Temps $t[n]$ définis par

$$t[n] = nT_e = \frac{n}{F_e} \text{ pour } n \in [\![0, 9]\!]$$

$$t_0 = 0, t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \cdots$$

Exemple



- On range chaque valeur

$$x(t[n]) = x(nT_e) = x\left(\frac{n}{F_e}\right)$$

dans un vecteur (ou un tableau)

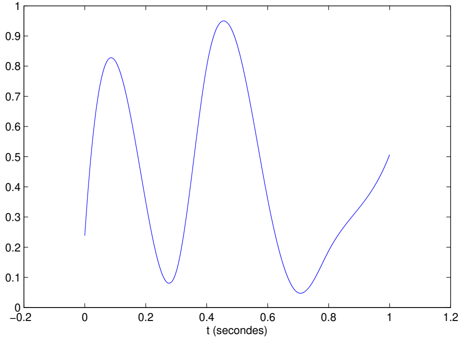
- $x[n] = x(t[n])$ avec $n \in [\![0, 9]\!]$
- Le signal est stocké sur $N = 10$ échantillons

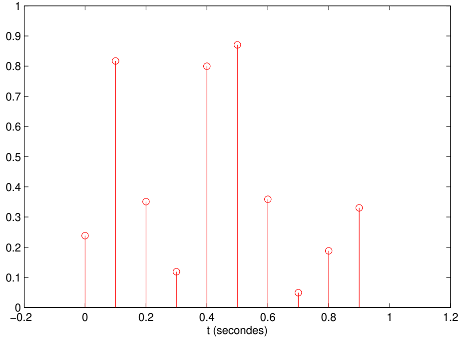
Limites de l'échantillonnage : approche qualitative

- Intuitivement si T_e est trop grand (donc F_e trop petite), on va perdre de l'information.
- En particulier, si le signal $x(t)$ varie très rapidement, si l'on veut garder toute l'information, il va falloir prendre une fréquence d'échantillonnage très élevée
- A l'inverse, si le signal $x(t)$ varie lentement, on n'aura pas besoin de prendre beaucoup de points

$\longrightarrow$ Comment choisir la fréquence d'échantillonnage ?

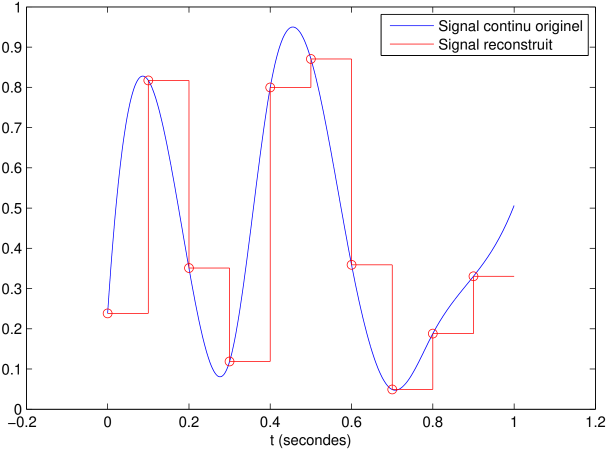
Exemple 1





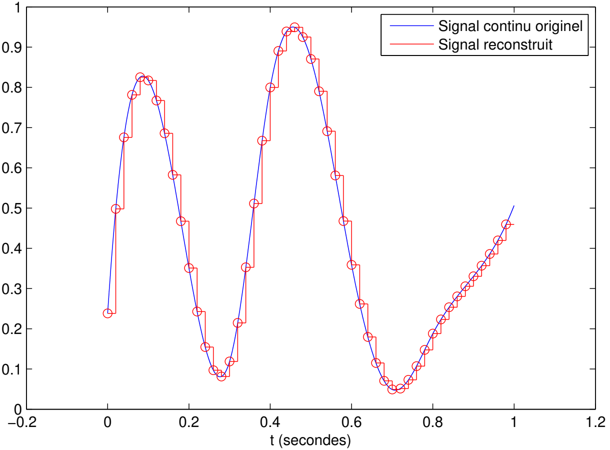
Le signal étudié ici varie de façon lente. On échantillonne le signal à $F_e = 10$ Hz et on va essayer de reconstruire le signal à partir des seuls échantillons. Comment faire ?

Exemple 1



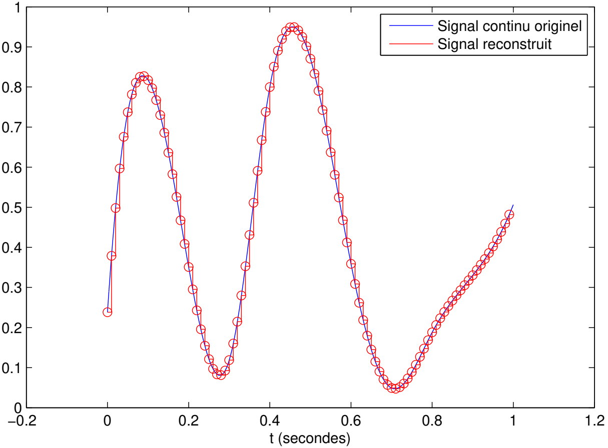
$F_e = 10$ Hz, $T_e = 0.1$ secondes. Reconstruction très grossière.

Exemple 1



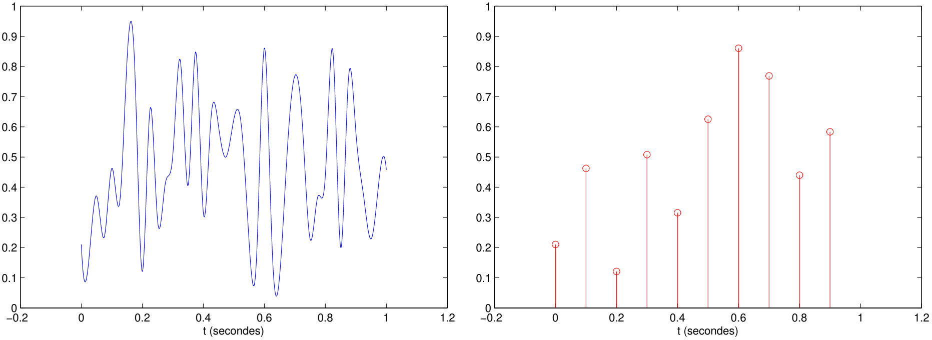
$F_e = 50$ Hz, $T_e = 0.02$ secondes. Reconstruction encore imparfaite.

Exemple 1



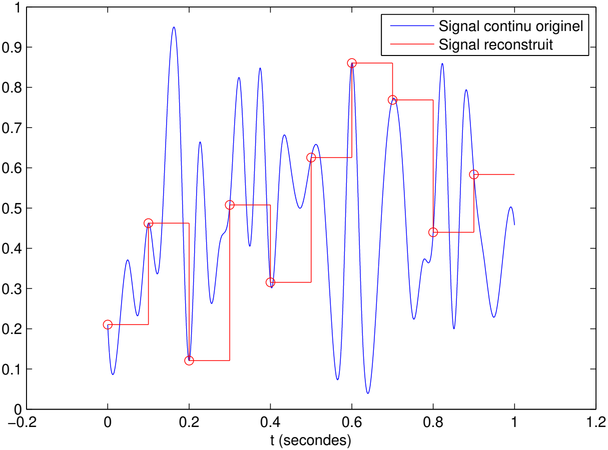
$F_e = 100$ Hz, $T_e = 0.01$ secondes. Reconstruction de qualité très acceptable.

Exemple 2



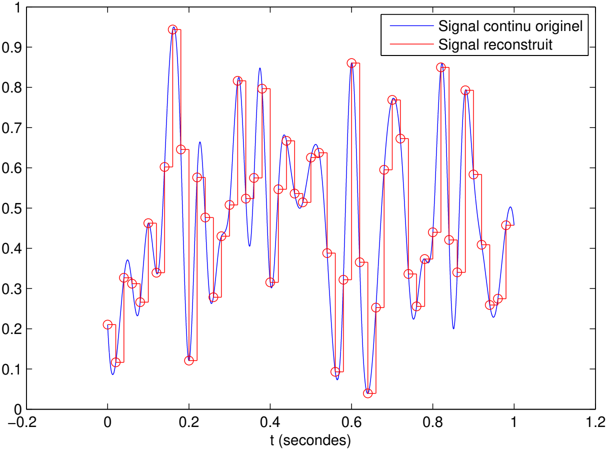
Cette fois-ci le signal étudié ici varie de façon rapide. Cela va-t-il influencer la reconstruction du signal ?

Exemple 2



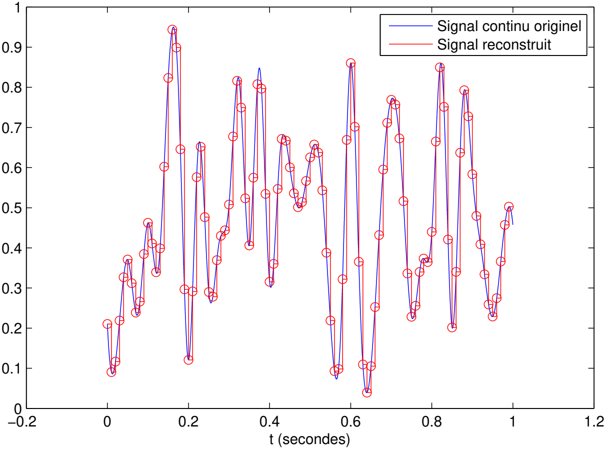
$F_e = 10$ Hz, $T_e = 0.1$ secondes. Reconstruction très grossière.

Exemple 2



$F_e = 50$ Hz, $T_e = 0.02$ secondes. Reconstruction de mauvaise qualité.

Exemple 2



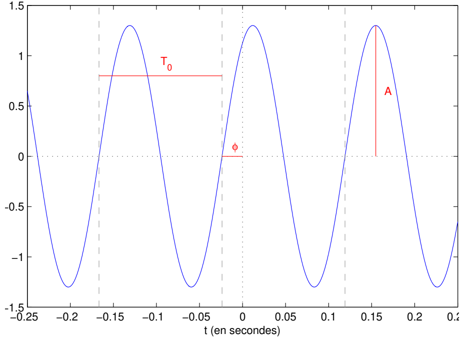
$F_e = 100$ Hz, $T_e = 0.01$ secondes. Reconstruction toujours trop approximative surtout dans les zones à variations rapides.

Limites de l'échantillonnage : approche quantitative

- Nous avons validé par des exemples que la fréquence d'échantillonnage à utiliser pour ne pas perdre trop d'information dépend du signal que l'on veut échantillonner.
- La notion de rapidité de variation semble apparaître comme un critère pertinent pour choisir la fréquence échantillonnage
- Nous allons introduire une décomposition de notre signal sur une série de fonctions simples dont on connait l'équation : la **sinusoïde**.
- Le signal sinusoïdal est couramment utilisé pour modéliser le son, les vibrations, le courant électrique ou les ondes électromagnétiques : c'est donc un outil fondamental notamment en physique, dont la rapidité de variation est connue

Plan du cours

Sinusoïde



$$A = 1.3, f_0 = 7 \text{ Hz}, \phi = \frac{\pi}{3}$$

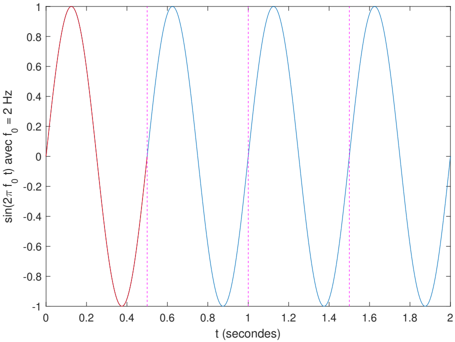
$$\boxed{x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

- Il se répète toutes les T_0 secondes

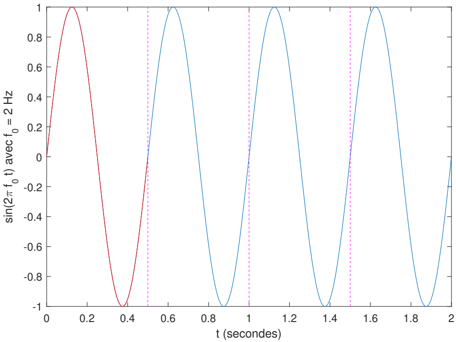
Tracé d'une sinusoïde



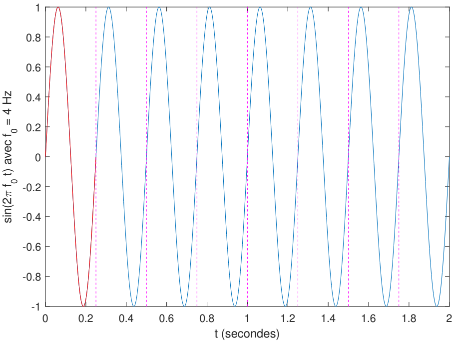
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 2 \text{ Hz}$$

- Le motif principal dure bien $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.5$ secondes
- En une seconde il y a bien $f_0 = 2$ périodes

Notion de fréquence fondamentale



$f_0 = 2$ Hz
2 périodes par seconde



$f_0 = 4$ Hz
4 périodes par seconde

- Plus f_0 est élevée, plus le signal varie de façon rapide
- Une note de musique parfaitement pure peut être modélisée par une sinusoïde : dans ce cas, plus f_0 est élevée, plus le son est aigu

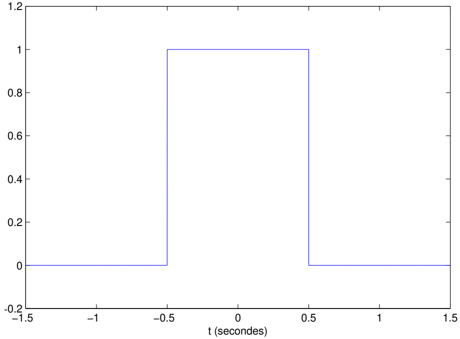
Intuition de la transformée de Fourier

- **Propriété (admise) :** Tout signal $x(t)$ réel, suffisamment régulier et d'énergie finie peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de sinusoïdes d'amplitudes, fréquences fondamentales et phases à l'origine différentes.

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(f) \sin\left(2\pi f t + \phi(f)\right) df$$

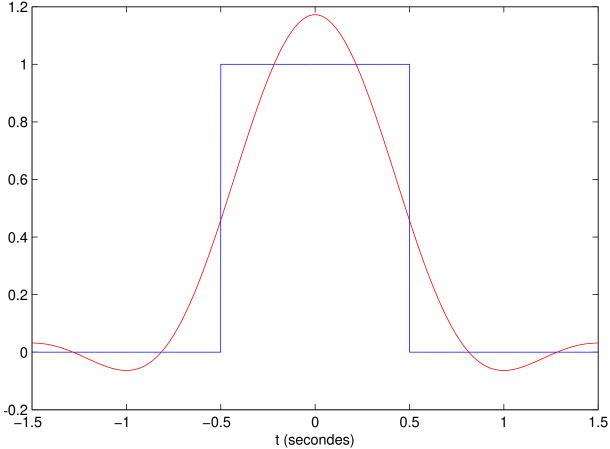
  avec $A(f) \in \mathbb{R}$, $\phi(f) \in [0, 2\pi[$.
- L'intégrale peut être ici vue comme une somme sur l'ensemble des fréquences comprises entre 0 et $+\infty$

Exemple : Signal porte



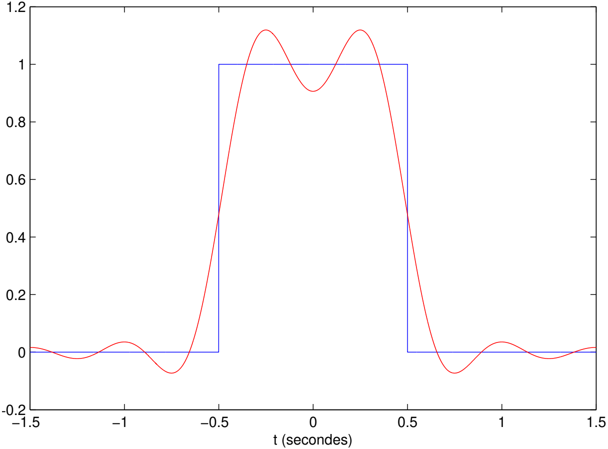
- Signal porte sur $[-0.5, 0.5]$
- On va essayer de reconstruire ce signal avec des sinusoïdes de différentes fréquences fondamentales.

Exemple : Signal porte



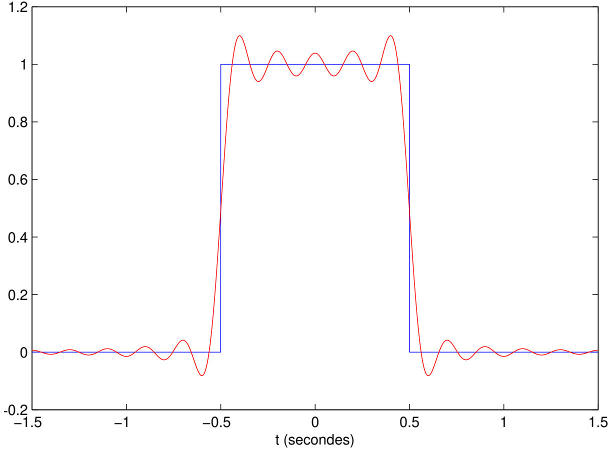
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1]$ Hz

Exemple : Signal porte



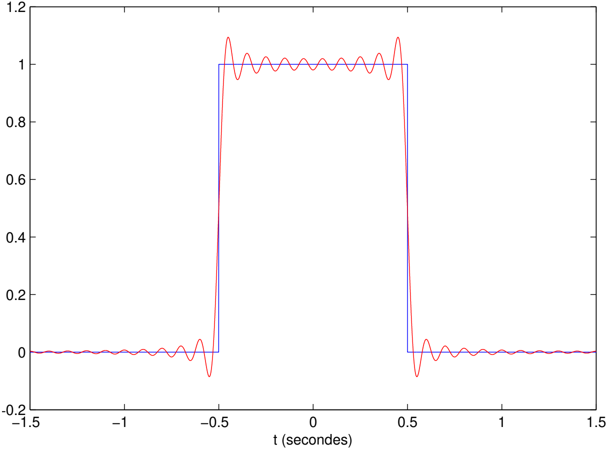
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 3]$ Hz

Exemple : Signal porte



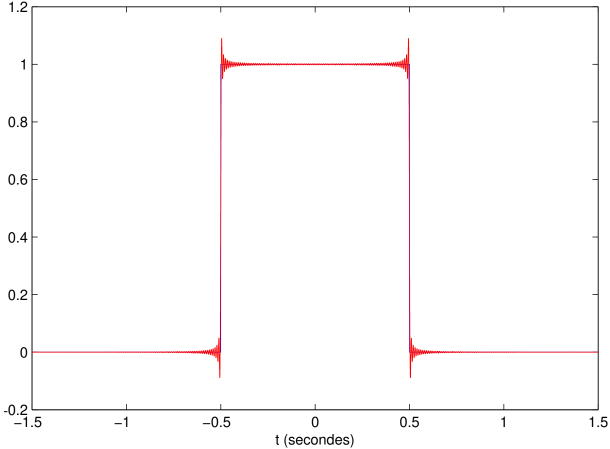
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 5]$ Hz

Exemple : Signal porte



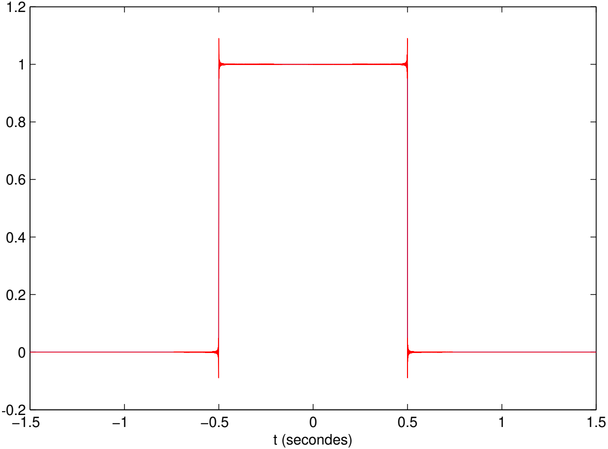
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 10]$ Hz

Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 100]$ Hz

Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1000]$ Hz

Principe de la transformée de Fourier

- Au lieu d'étudier la valeur $x(t)$ du signal au temps t, on va étudier la contribution de la sinusoïde de fréquence f dans l'ensemble du signal
- Cette contribution, notée $X(f)$ est appelée **transformée de Fourier**
- On va étudier le signal dans le domaine fréquentiel (ou domaine spectral) en regardant les contributions relatives des différentes fréquences f
- Des propriétés mathématiques établissent que sous certaines conditions, on peut reconstruire parfaitement le signal $x(t)$ si l'on connaît tous les coefficients $X(f)$

Définition

- Étant donné un signal $x(t)$ réel, suffisamment régulier et d'énergie finie, on appelle transformée de Fourier et on note $X(f)$, la fonction vérifiant :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

- Cette fonction se calcule de façon explicite grâce à la formule :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

Interprétation : transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f)\right\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df \qquad \textit{transformée de Fourier inverse}$$

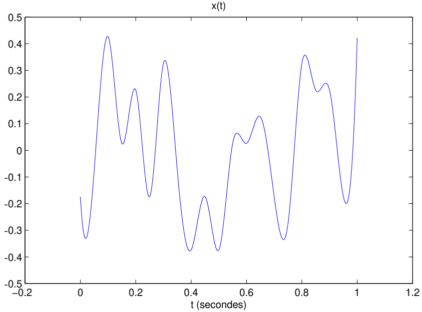
- $X(f)$ est une quantité complexe, qui rend compte de la contribution de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans le signal $x(t)$
- Le module $|X(f)|$ est lié à l'amplitude de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes. Si cette quantité est élevée, c'est que la sinusoïde de fréquence fondamentale f a une place importante dans la décomposition de $x(t)$.
- L'argument $\arg\left\{X(f)\right\}$ est lié au déphasage de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes.
- Seules les fréquences positives ont un vrai sens physique

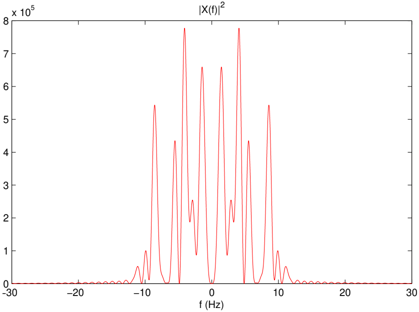
Interprétation : transformée de Fourier

$$\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \quad \textit{transformée de Fourier}$$

- Pour calculer la transformée de Fourier, il faut pouvoir observer $x(t)$ sur l'ensemble des temps possibles, ce qui n'est souvent pas possible en pratique.
- Même si $x(t)$ est réel, la quantité $X(f)$ est a priori complexe. Pour visualiser cette quantité on représente en général le module au carré $|X(f)|^2$, appelé aussi **spectre**.

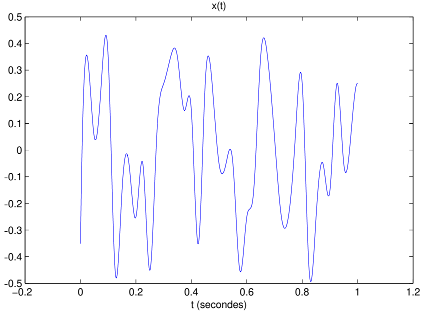
Interprétation d'un spectre

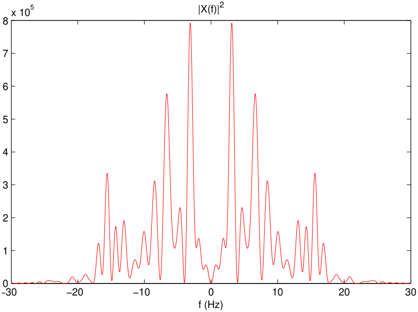




Signal lent : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé dans les basses fréquences
Les sinusoïdes de basses fréquences fondamentales contribuent plus que les autres

Interprétation d'un spectre

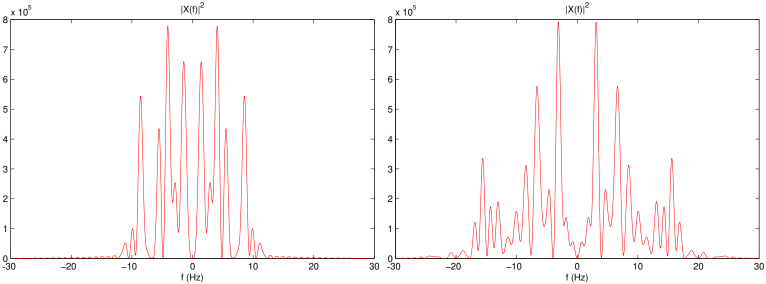




Signal plus rapide : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé aussi dans les fréquences plus élevées

Les sinusoïdes de plus hautes fréquences fondamentales contribuent aussi

Notion de largeur de bande



- Si on compare ces deux spectres, on voit que les valeurs élevées sont comprises entre -10 Hz et 10 Hz pour le premier, et entre -20 Hz et 20 Hz pour le second
- On peut définir ici la notion de support fréquentiel.

Notion de largeur de bande

- On appelle **largeur de bande** d'un signal et on note $B = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un signal occupe.
- Dans notre exemple, on a :

$$B_1 = 0 - 10 \text{ Hz} \qquad B_2 = 0 - 20 \text{ Hz}$$

- Attention, pour déterminer la largeur de bande, il ne faut considérer que les fréquences positives !
- Dans le cas où $f_{min} = 0$ on dit que le signal est en **bande de base**, et on note plus simplement $B = f_{max}$
- Dans notre exemple, on écrirait plus simplement $B_1 = 10$ Hz et $B_2 = 20$ Hz

Critère de Shannon-Nyquist

- Considérons un signal $x(t)$ de largeur de bande $B = [f_{min}, f_{max}]$: dans quel cas pourra-t-on l'échantillonner sans détruire de l'information ?
- Nous avons vu qu'un signal pouvait être décomposé en une infinité de sinusoïdes
- **Critère de Shannon-Nyquist** Pour échantillonner correctement le signal $x(t)$ il faut que

$$\boxed{F_e > 2f_{max}}$$

- Remarques :
  - En bande de base ($f_{min} = 0$), on note $B = f_{max}$ donc le critère de Nyquist s'écrit $F_e > 2B$
  - Si $f_{max} = +\infty$ il est impossible de respecter scrupuleusement le critère de Nyquist

Méthodologie

- Etant donné un signal continu $x(t)$ que l'on souhaite numériser (son, température, etc...), on détermine la fréquence maximale f_{max} présente dans le signal (i.e. on identifie le phénomène à variation la plus rapide dans le signal).
- On choisit ensuite la fréquence d'échantillonnage telle que $F_e > 2f_{max}$
- Attention à partir de cette étape, on ne pourra pas observer de fréquences $f > \frac{F_e}{2}$

Plan du cours

1. Echantillonnage uniforme

2. Transformée de Fourier

3. Transformée de Fourier discrète

4. Filtrage linéaire

Cas discret

- La transformée de Fourier telle que nous l'avons vue n'est définie que pour les signaux continus. Comment étudier le spectre de séries temporelles numériques stockées sur ordinateur ?
- Il existe une variante, appelée **transformée de Fourier discrète**
- Si le signal $x[n]$ contient N échantillons, elle est définie par :

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1}$$

- Le vecteur $X[k]$ contenant la TFD contient le même nombre de valeurs que le signal d'entrée $x[n]$
- L'espace entre deux fréquences observables est appelée *résolution en fréquence* :

$$\boxed{\Delta f = \frac{F_e}{N}}$$

où F_e est la fréquence d'échantillonnage, et N le nombre d'échantillons du signal qu'on analyse.

Transformée de Fourier discrète

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

- Deux différences majeures avec la transformée de Fourier continue $X(f)$:
  - On n'observe que les fréquences multiples de la résolution en fréquence

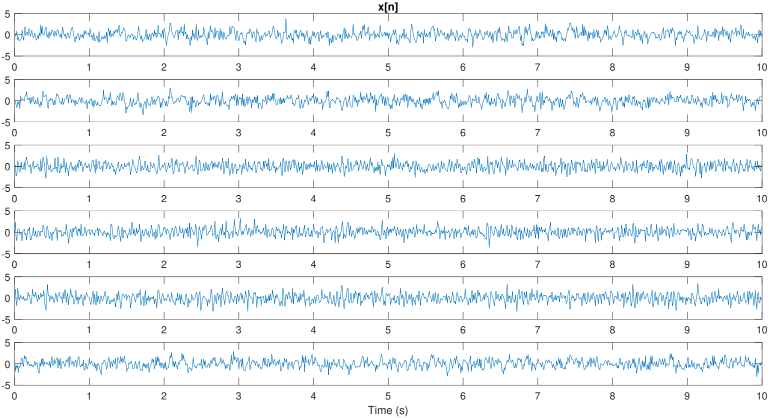
$$f[k] = k\frac{F_e}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

  - On n'observe aucune fréquence supérieure à la fréquence de Nyquist $\frac{F_e}{2}$
- Souvent on observe le spectre sur $\left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$, tout en gardant à l'idée que pour un signal réel, le module au carré $|X[k]|^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Analyse de spectre

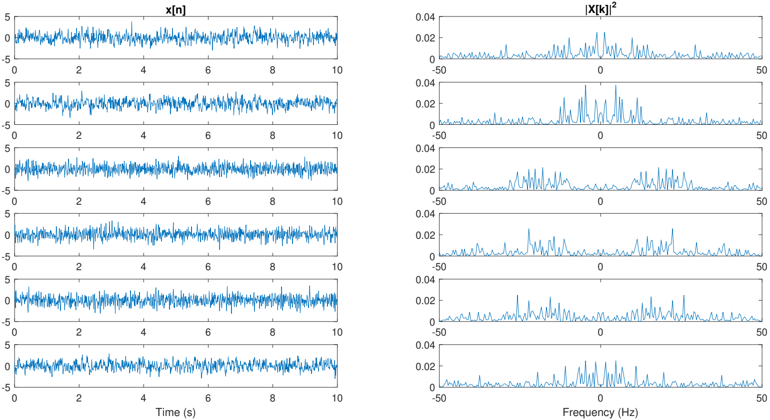
- En réalité, l'utilisation de la transformée de Fourier dépasse largement la thématique de l'échantillonnage
- En observant le spectre d'un signal, on peut analyser les phénomènes présents dans le signal
- Basses fréquences : phénomènes à variations lentes
- Hautes fréquences : phénomènes à variations rapides

Exemple



Deux classes de signaux ?

Exemple



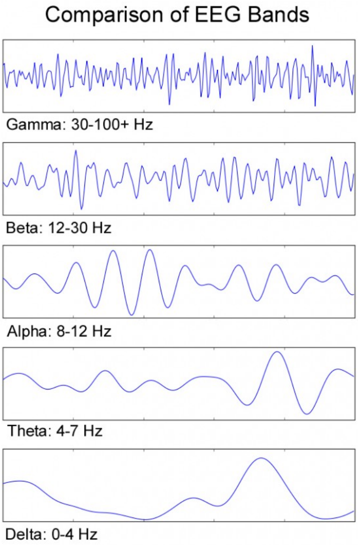
Deux classes de signaux : reconnaissable dans le domaine des fréquences

Cas de l'EEG

Électroencéphalographie (EEG) :

- Mesure l'activité électrique du cerveau grâce à un réseau de capteurs
- Utilisé pour étudier certaines maladies neurologiques (épilepsie) et pour l'étude du sommeil (polysomnographie)
- Chaque phase du sommeil correspond à l'apparition de certaines fréquences dans le cerveau

Cas de l'EEG



Chaque phase du sommeil correspond à l'apparition de certaines fréquences dans le cerveau :

- Ondes delta : sommeil profond sans rêves
- Ondes thêta : relaxation profonde et installation du sommeil
- Ondes alpha : relaxation légère et veille calme
- Ondes bêta : éveil actif et sommeil

L'analyse spectrale du signal permet de savoir dans quelle phase de sommeil on se situe.

Plan du cours

De l'analyse spectrale au filtrage

- L'analyse spectrale permet de voir ce qui se cache derrière un signal
- En modifiant le contenu en fréquence d'un signal, on peut favoriser certains phénomènes ou mettre en évidence certaines composantes du signal
- Cette tâche s'appelle **filtrage** : il s'agit de transformer un signal x en un signal y qui aura des propriétés différentes
- Dans ce cours, nous allons voir un type de filtrage appelé **filtrage linéaire**

Filtre linéaire dans le domaine fréquentiel

$$X(f) \longrightarrow \boxed{\times H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

$$\boxed{Y(f) = H(f) \times X(f)}$$

- $X(f)$: transformée de Fourier du signal d'entrée
- $Y(f)$: transformée de Fourier du signal de sortie
- $H(f)$: **fonction de transfert** du filtre

Méthodologie

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{TF}} \longrightarrow X(f) \longrightarrow \boxed{\times H(f)} \longrightarrow Y(f) \longrightarrow \boxed{\mathcal{TF}^{-1}} \longrightarrow y(t)$$

- Un filtre linéaire est donc totalement défini par sa fonction de transfert $H(f)$
- Dans le cas général $H(f)$ est une quantité complexe : le module $|H(f)|$ agit sur l'amplitude de la sinusoïde de fréquence f et l'argument $\arg\left(H(f)\right)$ sur sa phase.
- Le filtrage linéaire peut être vu comme une modification du spectre du signal

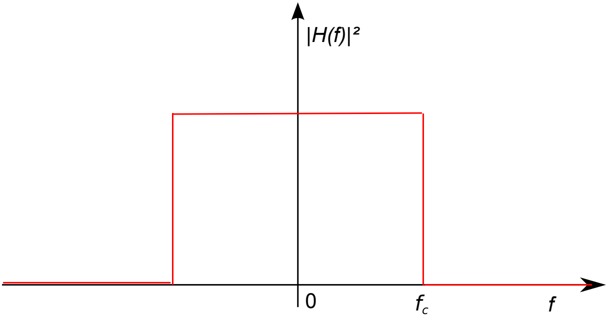
Bande passante

- En regardant le carré du module de la fonction de transfert $|H(f)|^2$ on va pouvoir savoir quel type d'effets le filtre aura
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est élevé seront conservées (ou amplifiées) dans le signal filtré
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est faible seront supprimées (ou atténuées) dans le signal filtré
- De la même façon qu'on a défini une largeur de bande pour un signal, on va définir une bande passante pour un filtre
- On appelle **bande passante** d'un filtrage et on note $BP = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un filtre laisse passer

Filtres idéaux

- Nous allons définir 4 types de filtres idéaux : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande
- Chacun de ces filtres a un comportement bien défini et idéal : il laisse passer à la perfection certaines fréquences et en bloque d'autres totalement
- Dans la réalité, si les filtres ont un comportement qui tend bien vers un des filtres idéaux, il est difficile de bloquer de façon parfaite des fréquences, et il s'agit plutot d'atténuations que de suppressions

Filtre passe-bas

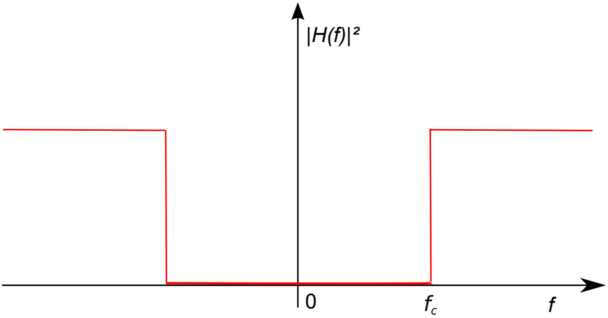


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [0, f_c]$

Filtre passe-haut

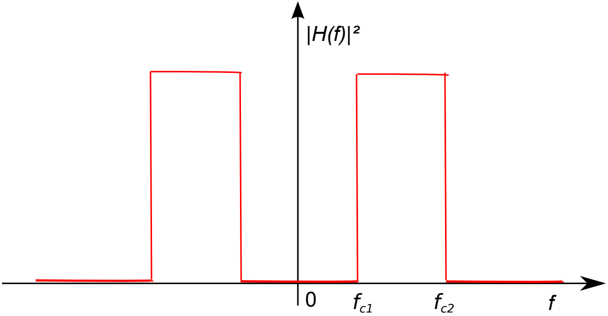


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_c, +\infty[$

Filtre passe-bande

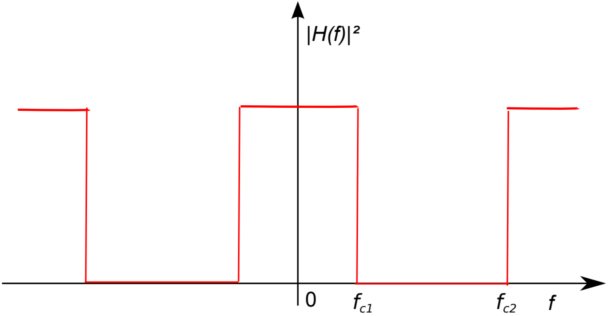


Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_{c1}, f_{c2}]$

Filtre coupe-bande

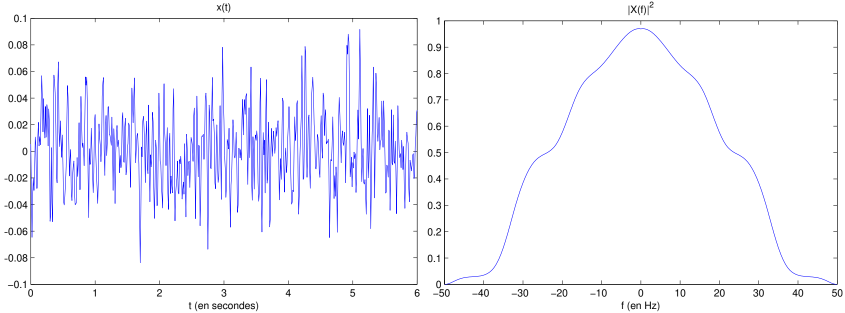


Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

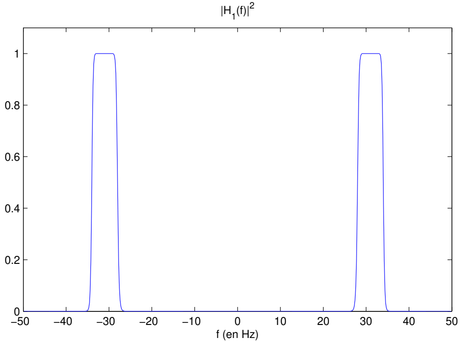
Bande passante $BP = [0, f_{c1}] \cup [f_{c2} + \infty[$

Contexte



On considère ce signal $x(t)$ ayant une largeur de bande $B = 50$ Hz
On va faire passer ce signal dans différents filtres et observer les conséquences sur le signal, et sur le spectre du signal

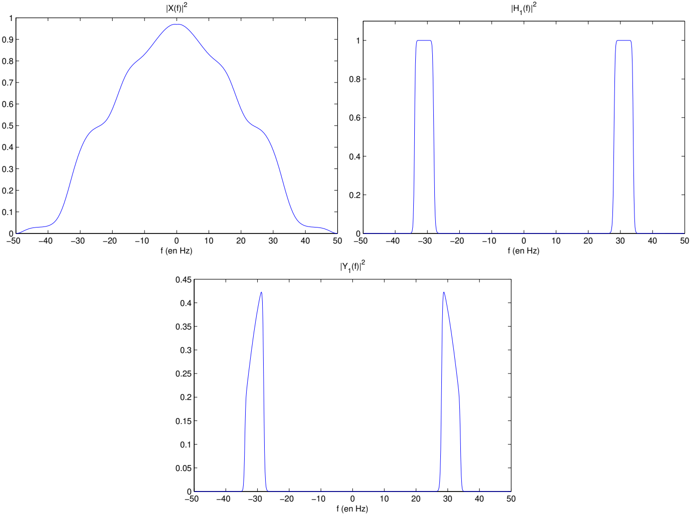
Exemple 1 : Passe bande



Filtre passe-bande

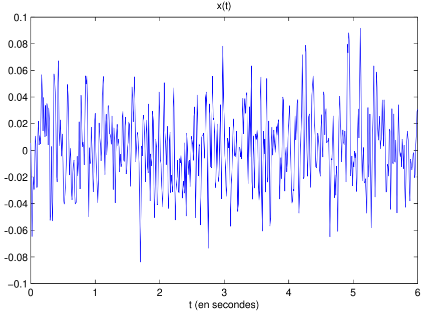
Bande passante $BP \approx [28, 34]$ Hz

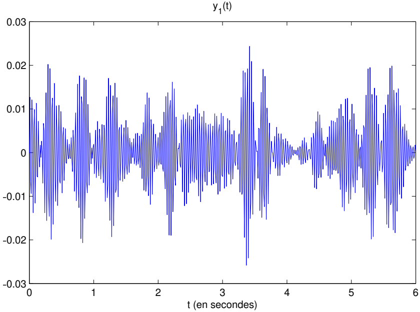
Exemple 1 : Passe bande



Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

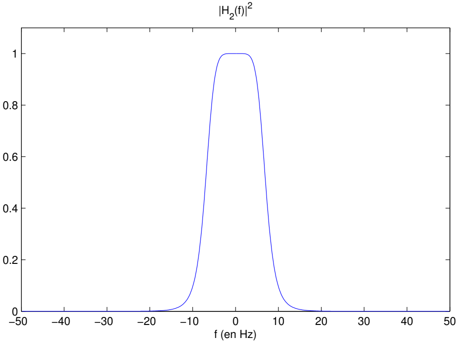
Exemple 1 : Passe bande





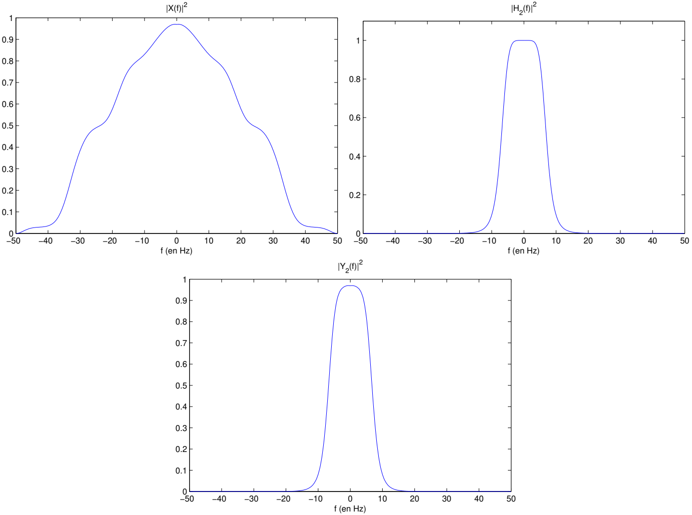
Le signal semble plus structuré : on a enlevé les basses fréquences et les hautes fréquences

Exemple 2 : Passe bas



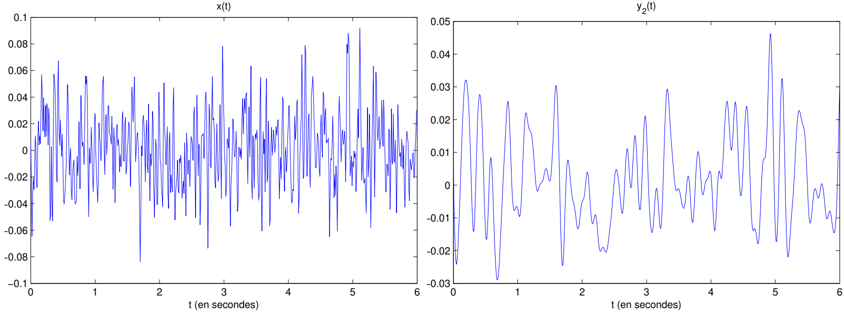
Filtre passe-bas
Bande passante $BP \approx [0, 7]$ Hz

Exemple 2 : Passe bas



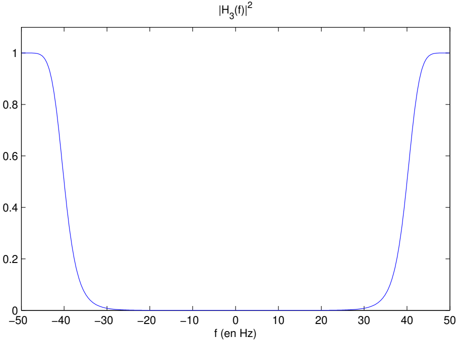
Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

Exemple 2 : Passe bas



Le signal est légèrement lissé : on a enlevé les hautes fréquences

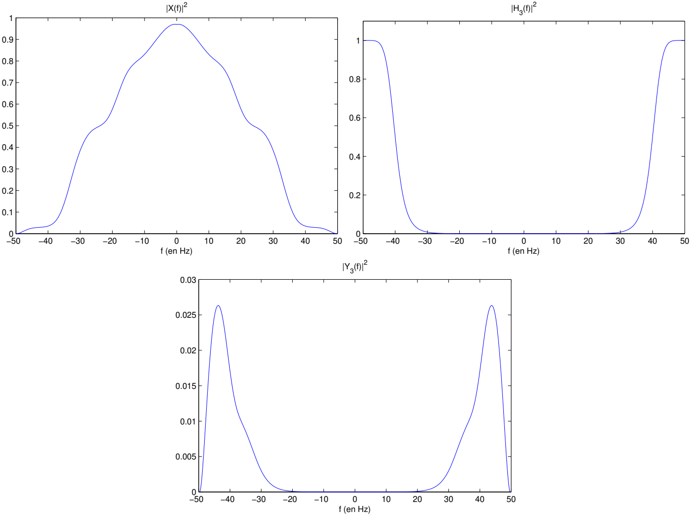
Exemple 3 : Passe haut



Filtre passe-haut

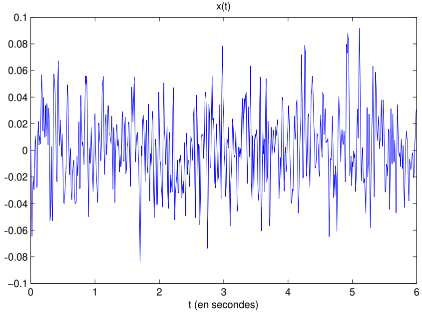
Bande passante $BP \approx [40, +\infty[$ Hz

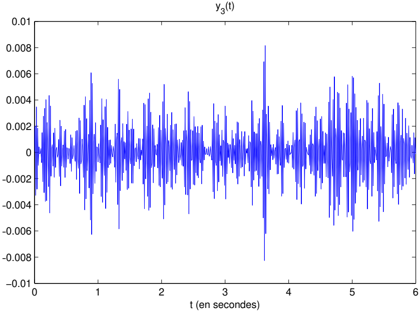
Exemple 3 : Passe haut



Quand on regarde le spectre de la sortie du filtre, on voit bien que toutes les fréquences en dehors de la bande passante ont été atténuées

Exemple 3 : Passe haut





Le signal semble varier de façon plus rapide : on a enlevé les basses fréquences

Utilisation des filtres

- Passe-bas : Lisser le signal ; débruiter un signal.
- Passe-haut : Mettre en évidence des évenements ponctuels, des discontinuités, des impulsions ; enlever des composantes continues ou des tendances.
- Passe-bande : Récupérer un signal émis dans une bande de fréquence déterminée ; débruiter un signal dont la largeur de bande est connue.
- Coupe-bande : Enlever une composante d'un signal de mélange ; réaliser de la séparation de sources.

Références

- L. Oudre. Introduction au traitement du signal, Université Paris 13
  http://www.laurentoudre.fr/its.html
- L. Oudre. Théorie du signal, Université Paris 13
  http://www.laurentoudre.fr/ths.html
- G. Scorletti. Traitement du Signal. Engineering school. STI tc2 Traitement du Signal, Ecole Centrale de Lyon, 2013, pp.193. ffcel-00673929v2f
  https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00673929v2/document
- C. Jutten. Théorie du signal. Cours de deuxième année (3i4) du département 3i. Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble
  http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Theorie_du_signal.pdf