Théorie du signal

Exercices corrigés 1 : Modèles, propriétés et transformations des signaux

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - $1^{\text{ère}}$ année

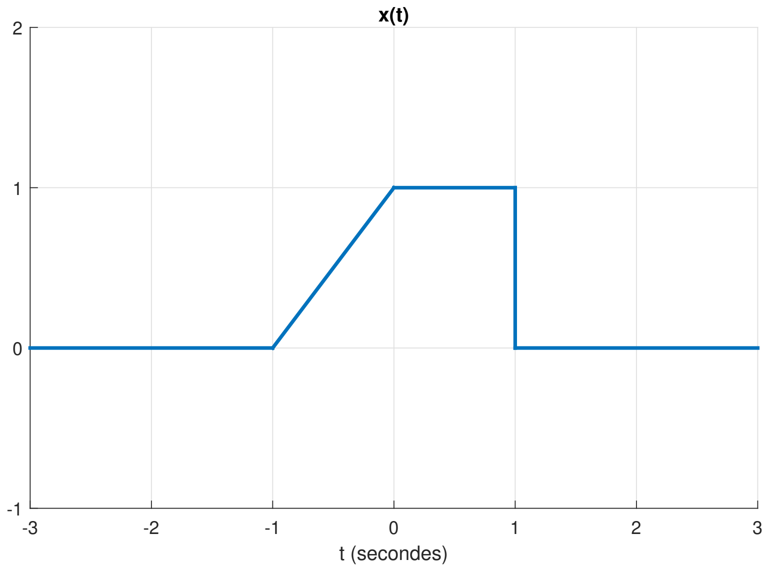
2019-2020

On rappelle les définitions suivantes

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 1

On considère le signal $x(t)$ suivant :



1. Écrire la définition du signal $x(t)$
2. Le signal $x(t)$ est-il continu sur $\mathbb{R}$? Est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? Précisez les éventuels points de non-dérivabilité et/ou non continuité.
3. Calculer sa valeur moyenne $\bar{x}$ et sa variance $\mathrm{var}(x)$ sur son support temporel.
4. Tracer les signaux:
   (a) $x_1(t) = x\left(\dfrac{3-t}{2}\right)$
   (b) $x_2(t) = x(t) * [\delta(t-2) + 3\delta(t+3)]$

Exercice 2

Montrer que

$$\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$$

Exercice 3

On considère le signal

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + 2\,\mathrm{rect}(t-2) + 2\,\mathrm{rect}(t+2)$$

1. Tracer le signal $x(t)$
2. Déterminer ses propriétés (support temporel, parité, imparité, périodicité, causalité)
3. Le signal est-il à énergie finie ou à puissance finie ?
4. Calculer son énergie totale E_x et sa puissance moyenne totale P_x
5. Le signal $x(t)$ est-il continu ? Sinon, lister ses points de discontinuités $t_1, \ldots, t_N$.
6. Montrer que :

$$\mathrm{rect}(t) = \mathrm{u}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{u}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

7. Ecrire $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = x_c(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(x(t_i^+) - x(t_i^-)\right) \times \mathrm{u}(t - t_i)$$

   où $x_c(t)$ est un signal continu

Exercice 4

On considère le signal $x(t)$ de l'exercice 4, et le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = x(t) \times \mathrm{u}(t)$$

1. Tracer le signal $y(t)$
2. Déterminer ses propriétés (support temporel, parité, imparité, périodicité, causalité)
3. Le signal est-il à énergie finie ou à puissance finie ?
4. Écrire le signal $y(t)$ sous la forme du produit de convolution d'une fonction rectangulaire et d'une somme de Dirac
5. Montrer que pour a, b réels on a

$$\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-a-b)$$

6. En utilisant le résultat de l'exercice 2, calculer et tracer

$$z(t) = y(t) * y(t)$$

7. Calculer la dérivée $y'(t)$ du signal $y(t)$ au sens des distributions.

Exercice 5

On considère le signal $x(t)$ réel suivant

$$x(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer ce signal
2. Déterminer ses propriétés (support temporel, parité, imparité, périodicité, causalité)
3. Le signal est-il à énergie finie ou à puissance finie ?
4. Calculer son énergie totale E_x et sa puissance moyenne totale P_x.
5. Calculer la dérivée $x'(t)$ du signal $x(t)$ au sens des distributions.