Théorie du signal

Travaux Dirigés 2 : Représentation vectorielle des signaux

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère un réel $T > 0$ et des entiers strictement positifs n et p. On définit les signaux

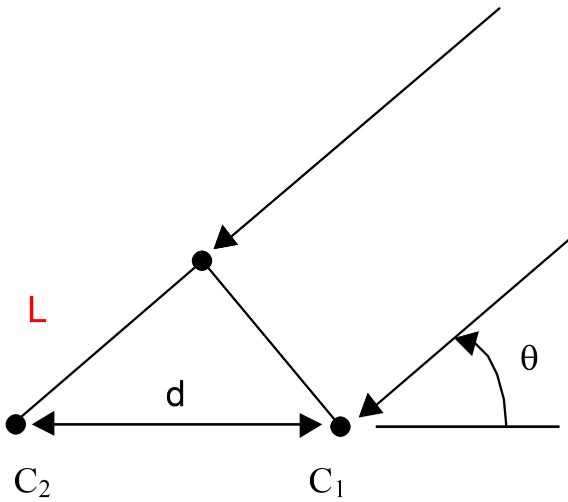
$$x_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$y_p(t) = \sin\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)$$

1. Quelle est la période fondamentale de $x_n(t)$? de $y_p(t)$?
2. Tracer $x_1(t)$ et $x_2(t)$, ainsi que $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
3. Montrer que les signaux $x_n(t)$ et $y_p(t)$ sont périodiques de période T et déterminer le type de produit scalaire que l'on doit utiliser pour ces signaux.
4. Calculer les fonctions d'autocorrélation $\gamma_{x_n}(\tau)$ et $\gamma_{y_p}(\tau)$. En déduire la puissance moyenne totale de ces signaux. Vérifier que les fonctions d'autocorrélations sont bien périodiques de période T.
5. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x_n y_p}(\tau)$. Les signaux $x_n(t)$ et $y_p(t)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2

On considère une source radio THF, située à l'infini et émettant dans le vide. On considère deux capteurs C_1 et C_2 qui enregistrent le signal émis par la source. Ces deux capteurs sont espacés de $d = 30$ cm, conformément au schéma ci-dessous.



On suppose ici que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Si l'on note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les signaux respectivement reçus par les capteurs C_1 et C_2, on peut considérer que le signal reçu par le capteur C_2 est identique à celui reçu par le capteur C_1 mais avec retardé du temps t_0 mis par l'onde pour parcourir la différence de trajet.

$$x_1(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

Le but de cet exercice est, grâce à l'utilisation de la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x_1x_2}(\tau)$, d'estimer t_0 puis la direction de la source θ.

On prendra $c = 3.10^8$ m.s^{-1} et $f_0 = 30$ MHz. On rappelle que la pulsation est définie par $\omega = 2\pi f$ et la longueur d'onde par $\lambda = \frac{c}{f}$.

1. Calculer la longueur d'onde λ_0 de cette onde
2. Calculer t_0 en fonction de c, d et θ. En déduire un encadrement pour t_0.
3. Calculer $\gamma_{x_1x_2}(\tau)$
4. Comment peut-on estimer t_0 sans ambiguité grâce à $\gamma_{x_1x_2}(\tau)$?

Exercice 3

On considère $T > 0$ et l'espace $\mathcal{L}^2\left(\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right], \mathbb{C}\right)$ des signaux à énergie finie et à support temporel borné $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$. On considère la base de fonctions

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \Phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

1. Quel est le produit scalaire que l'on doit utiliser pour ces signaux ?
2. Montrer que la base $\{\Phi_k(t)\}_k$ est orthonormale
3. Démontrer la relation suivante :

$$2je^{j\left(\frac{a+b}{2}\right)} \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = e^{ja} - e^{jb}$$

4. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{\Phi_k\Phi_l}(\tau)$
5. On considère un entier strictement positif N et le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi N t}{T}\right) & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On appelle ce genre de signal un *train d'onde* ou un *paquet d'onde*. Un tel paquet contient un nombre arbitraire d'ondes élémentaires (ici N) et est très utilisé notamment en mécanique quantique.

   (a) Tracer le signal $x(t)$
   (b) Décomposer le signal $x(t)$ sur la base $\{\Phi_k(t)\}_k$
   (c) En utilisant les résultats de la question 4, calculer la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$