Théorie du signal

Travaux Dirigés 4 : Transformée de Fourier - Densités spectrales

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère un réel $\alpha > 0$ et le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = e^{-\alpha t^2}$$

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

1. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ? Calculer son énergie totale E_x
2. Quelles sont les caractéristiques du signal $x(t)$ (réel/complexe, pair/impair) ? Que peut-on dire sur sa transformée de Fourier $X(f)$?
3. Montrer que
$$-\alpha t^2 - j2\pi f t = -\alpha \left(t + j\frac{\pi f}{\alpha} \right)^2 - \frac{\pi^2 f^2}{\alpha}$$
4. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$.
5. On considère un réel $a > 0$ et le signal $z_a(t)$ défini par
$$z_a(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$
   (a) Calculer la transformée de Fourier $Z_a(f)$ de $z_a(t)$
   (b) Montrer que pour $a, b > 0$, on a
$$z_a * z_b = z_{a+b}$$

Exercice 2

On considère un signal $x(t)$ à énergie finie et des réels positifs A, t_0 et T. On définit le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = Ax\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

1. Le signal $y(t)$ est-il à énergie finie ?
2. Calculer en fonction de $X(f)$ la transformée de Fourier $Y(f)$ du signal
3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_y(f)$ en fonction de $\Gamma_x(f)$

Exercice 3

On considère le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) + \operatorname{rect}\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

On rappelle que $\operatorname{rect}(t) * \operatorname{rect}(t) = \operatorname{tri}(t)$

1. Tracer $x(t)$
2. Tracer $x^*(-t)$ et l'écrire sous la forme de fonctions rectangulaires
3. Montrer que pour a et b réels
$$\operatorname{rect}(t-a) * \operatorname{rect}(t-b) = \operatorname{tri}(t-a-b)$$
4. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ et la tracer
5. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$ de $x(t)$ et tracer son allure.

Exercice 4

On considère deux réels $f_0, f_1 > 0$ tels que $f_0 < f_1$. On considère le signal

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_1 t)$$

1. Que peut-on dire sur le signal $x(t)$ (réel/complexe, pair/impair) ?
2. Calculer et tracer la transformée de Fourier $X(f)$
3. A quelle condition le signal $x(t)$ est-il périodique ?
4. On suppose que $f_0 = 60$ Hz et $f_1 = 100$ Hz.
   (a) Le signal $x(t)$ est-il périodique ? Calculer sa période fondamentale T.
   (b) Calculer la décomposition de $x(t)$ en série de Fourier
   (c) Calculer et tracer la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$.
   (d) Calculer la puissance moyenne totale P_x du signal $x(t)$