Théorie du signal

Travaux Dirigés 5 : Modélisation des systèmes

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Rappels de cours utiles

- Le filtre causal de fonction de transfert
$$H_{\omega_0}^{LP}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_0}}$$
est un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0$. Son gain G_{dB} en décibels peut être modélisé de façon idéale par
$$G_{dB} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega << \omega_0 \\ -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_0) & \text{pour } \omega >> \omega_0 \end{cases}$$
On l'appelle **passe-bas du premier ordre**
- Le filtre causal de fonction de transfert
$$H_{\omega_0}^{HP}(p) = \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{p}}$$
est un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0$. Son gain G_{dB} en décibels peut être modélisé de façon idéale par
$$G_{dB} = \begin{cases} 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega_0) & \text{pour } \omega << \omega_0 \\ 0 & \text{pour } \omega >> \omega_0 \end{cases}$$
On l'appelle **passe-haut du premier ordre**

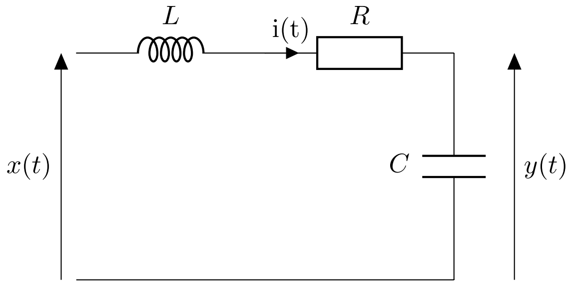
Exercice 1

On considère le filtre causal de fonction de transfert
$$H(p) = \frac{12p}{p^2+12p+20}$$

1. Le filtre est-il stable ?
2. Mettre la fonction de transfert $H(p)$ sous la forme
$$H(p) = \frac{a}{p-p_1} + \frac{b}{p-p_2}$$
où a et b sont des réels et p_1 et p_2 les pôles de la fonction de transfert.
3. En utilisant le fait que
$$\mathcal{TL}\left\{e^{-\alpha t}u(t)\right\} = \frac{1}{p+\alpha}$$
en déduire une expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$
4. Mettre $H(p)$ sous la forme
$$H(p) = K \times H_{\omega_1}^{LP}(p) \times H_{\omega_2}^{HP}(p)$$
où K, ω_1 et ω_2 sont des réels positifs tels que $\omega_1 > \omega_2$
5. A partir de cette expression, calculer $|H(jw)|^2$ et en déduire le type du filtre (passe-bas, passe-haut, etc...)
6. Grâce aux approximations données dans le rappel de cours, tracer l'allure gain en décibels de ce filtre

Exercice 2

On considère le système RLC suivant :



On pourra noter $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\lambda = \dfrac{R}{2L}$. On supposera que $\omega_0 > \lambda$ et on notera $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

On rappelle les deux expressions suivantes :

$$\mathcal{TL}\left\{\cos(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)\right\} = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{TL}\left\{\sin(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)\right\} = \frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

1. Etablir l'équation différentielle entre $x(t)$ et $y(t)$. En déduire que le système est linéaire.
2. Donner la fonction de transfert $H(p)$ de ce système et l'exprimer en fonction de ω_0 et λ
3. Le système est-il stable ?
4. Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme
$$H(p) = K \times \frac{\omega_p}{(p+\lambda)^2+\omega_p^2}$$
En déduire l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.
5. Montrer que la réponse du système à un échelon $x_u(t) = V_e u(t)$ admet une transformée de Laplace qui peut s'écrire
$$Y_u(p) = a \times \frac{1}{p} + b \times \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega_p^2} + c \times \frac{\omega_p}{(p+\lambda)^2+\omega_p^2}$$
où a, b, c sont des réels. En déduire la réponse indicielle $y_u(t)$ du système. Vers quelle valeur limite y_∞ converge-t-elle ?

Exercice 3

On considère le filtre $H_a(f)$ défini par :

$$H_a(f) = \begin{cases} 2 & \text{pour } f \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la réponse $x_a(t)$ de ce filtre au signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Dessiner son spectre avant et après filtrage.
2. Même question pour le signal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

Le signal obtenu est appelé ***signal analytique*** *$x_a(t)$ associé à $x(t)$. Il s'agit de l'équivalent complexe d'un signal réel dont on aurait gommé toutes les fréquences négatives et multiplié par deux les fréquences positives. Cette transformation est très utilisée en télécommunications et modulations.*

3. On rappelle que
$$\mathcal{TF}\left\{\mathrm{u}(t)\right\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$
Montrer par analogique que la réponse impulsionnelle du système peut s'écrire
$$h_a(t) = \delta(t) + j\frac{1}{\pi t}$$

Le signal analytique $x_a(t)$ peut donc s'écrire $x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ où $\hat{x}(t) = \left(\frac{1}{\pi t}\right) * x(t)$ est appelée ***transformée de Hilbert*** *du signal $x(t)$. Attention, en réalité, une telle réponse impulsionnelle n'est définie qu'au sens des distributions.*

4. En déduire la transformée de Hilbert des signaux $\cos(2\pi f_0 t)$ et $\sin(2\pi f_0 t)$
5. On considère un signal $x(t)$ en bande de base et à largeur de bande finie B, et le signal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 >> B$. Montrer que sa transformée de Hilbert $\hat{y}(t)$ peut s'écrire $\hat{y}(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t)$.

Exercice 4

On considère le système dont la relation entrée/sortie peut s'écrire

$$y(t) = x(t)^2$$

1. Le système est-il linéaire ? causal ? stable ?
2. On considère le signal d'entrée
$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$$
Montrer que le système fait apparaître des fréquences qui n'étaient pas présentes dans le signal original.