Théorie du signal

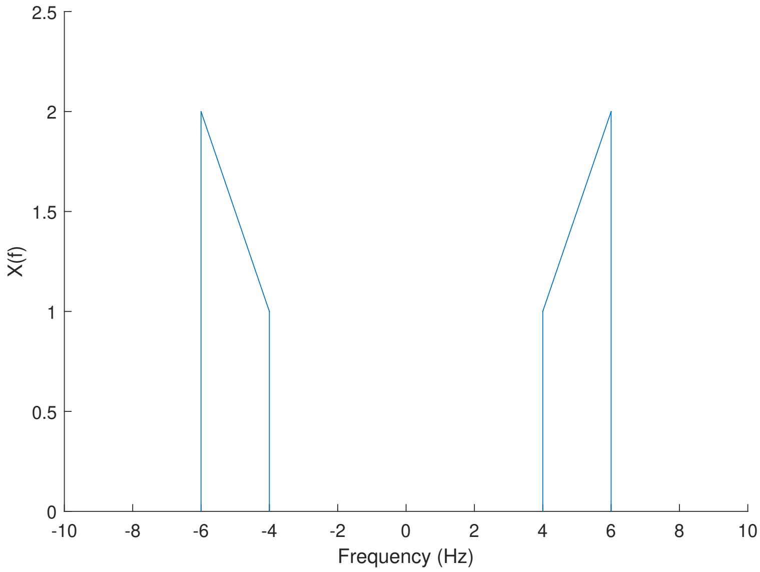
Travaux Dirigés 6 : Echantillonnage et reconstruction

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère le signal $x(t)$, dont la transformée de Fourier $X(f)$ est représentée ci-dessous

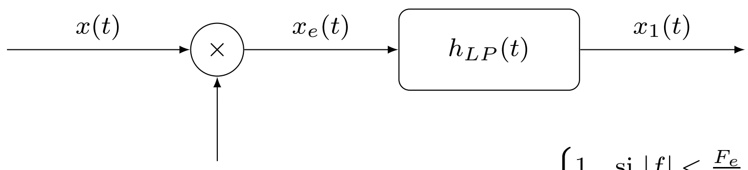


1. D'après le critère de Nyquist, quelle est la fréquence F_e que l'on doit utiliser pour échantillonner sans perte ce signal ?
2. On rappelle que pour un signal échantillonné à la fréquence d'échantillonnage F_e, l'expression du spectre est
$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$
Quel est le support fréquentiel de la transposition d'ordre k, $X\left(f - kF_e\right)$?
3. Montrer que pour $F_e \in [6 \text{ Hz}, 8 \text{ Hz}]$, alors il n'y a pas de repliement de spectre
4. Proposer une stratégie pour échantillonner et reconstruire parfaitement ce genre de signaux, tout en respectant pas le critère de Nyquist

Exercice 2

On considère un signal $x(t)$ réel, à énergie finie, en bande de base et à largeur de bande finie B. On suppose également que sa transformée de Fourier est réelle et positive.

1. Que peut-on dire sur la durée de $x(t)$, sa valeur $x(0)$ et sa parité/imparité ?
2. A quelle condition est-il possible d'échantillonner le signal $x(t)$ sans perte d'information ?
3. On échantillonne le signal à la fréquence d'échantillonnage $F_e = \alpha B$ avec $1 < \alpha < 2$, puis on le filtre grâce à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{F_e}{2}$. On note $x_1(t)$ le signal ainsi obtenu.

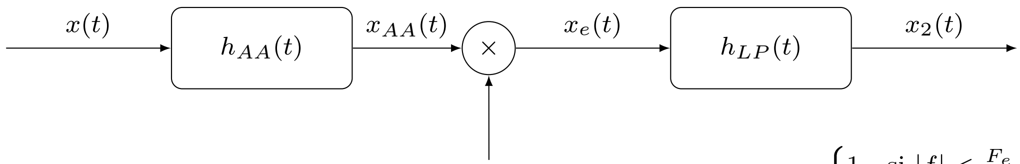


$$T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad \text{avec } T_e = \frac{1}{\alpha B}$$

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < \frac{F_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Faire un schéma pour illustrer les différentes opérations dans le domaine fréquentiel
(b) Donner l'expression de $X_1(f)$ en fonction de $X(f)$
(c) Exprimer $x_1(0)$ en fonction de $X(f)$ et le comparer à $x(0)$
(d) Comparer l'énergie du signal $x_1(t)$ avec celle du signal $x(t)$

4. On réitère ce processus, mais cette fois en appliquant un filtre anti repliement de spectre avant de réaliser l'échantillonnage. On note $x_2(t)$ le signal obtenu en fin de traitement.



$$T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad \text{avec } T_e = \frac{1}{\alpha B}$$

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < \frac{F_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Donner l'expression de la fonction de transfert $H_{AA}(f)$ du filtre anti repliement de spectre
(b) Faire un schéma pour illustrer les différentes opérations dans le domaine fréquentiel
(c) Donner l'expression de $X_2(f)$ en fonction de $X(f)$
(d) Exprimer $x_2(0)$ en fonction de $X(f)$ et le comparer à $x(0)$
(e) Comparer l'énergie du signal $x_2(t)$ avec celle du signal $x(t)$

Exercice 3

On considère un signal $x(t)$, qui a été échantillonné de façon idéale en respectant le critère de Nyquist à la fréquence d'échantillonnage F_e, et dont les échantillons sont notés $x[n]$. On souhaite reconstruire ce signal de façon approchée grâce à un bloqueur d'ordre 1

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \,\mathrm{tri}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

1. Faire un schéma du signal ainsi reconstitué avec des échantillons $x[0] = 1$, $x[1] = 2$, $x[2] = -1$, $x[3] = 2$, $x[4] = 1$ et $T_e = 1$ s

2. En notant $x_e(t)$ le signal obtenu par échantillonnage idéal, exprimer $\hat{x}(t)$ comme une version filtrée de $x_e(t)$ par un filtre dont on précisera la réponse impulsionnelle $h(t)$. Ce filtre est-il causal ? Faire un schéma bloc.

3. Calculer la transformée de Fourier $\hat{X}(f)$ du signal reconstruit en fonction de $X(f)$

4. Faire un schéma pour observer ce qui se passe dans la bande de fréquence $\left[-\frac{F_e}{2}, +\frac{F_e}{2}\right]$. Quelle est l'atténuation maximale dans cette bande de fréquence ? Comment devrait-on procéder pour reconstruire parfaitement le signal $x(t)$ à partir de $\hat{x}(t)$?