

Théorie du signal

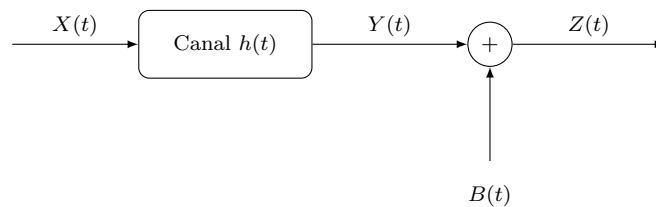
Travaux Dirigés 7 : Introduction aux signaux aléatoires - Notion de bruit

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1^{ère} année

2019-2020

Exercice 1

On considère le système suivant



On suppose que $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et $B(t)$ un bruit blanc additif. On suppose de plus que $X(t)$ et $B(t)$ sont décorrélés.

1. Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{XB}(\tau) = \mathbb{E}[X(t)B(t + \tau)]$
2. Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{XY}(\tau)$ en fonction de $h(t)$ et $R_{XX}(\tau)$
3. En déduire la fonction d'intercorrélation $R_{XZ}(\tau)$
4. Supposons que l'on ne connaisse pas la réponse impulsionnelle $h(t)$. Montrer qu'en mettant en entrée un bruit blanc $X(t)$ connu de variance σ^2 décorrélé de $B(t)$, on peut retrouver $h(t)$ en étudiant l'intercorrélation $R_{XZ}(\tau)$.

Cette méthode d'identification de réponse impulsionnelle par intercorrélation sortie-entrée est parfois utilisée car elle ne nécessite pas l'application d'une impulsion de Dirac impossible à réaliser. Comme le bruit blanc est également impossible à générer, on utilise souvent un bruit blanc à largeur de bande finie égale à la bande passante du filtre.

Exercice 2

On considère un signal aléatoire $X(t)$ de densité spectrale de puissance $S_X(f)$ connue, et un bruit blanc $B(t)$ de variance σ^2 . On suppose que $X(t)$ et $B(t)$ sont décorrélés et que

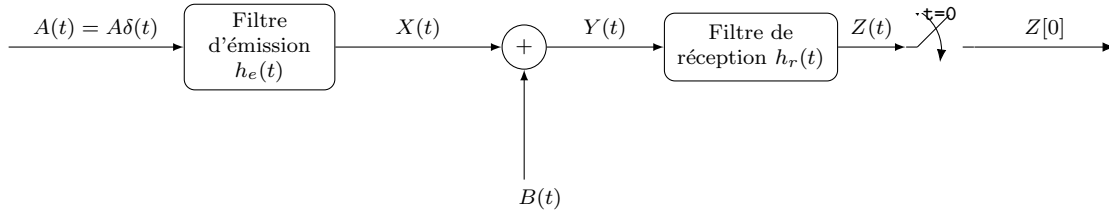
$$Y(t) = X(t) + B(t)$$

Le but de l'exercice est de retrouver le signal $X(t)$ à partir du signal $Y(t)$, en concevant un filtre de réponse impulsionnel $h(t)$ tel que

$$\hat{X}(t) = h(t) * Y(t)$$

1. Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{YX}(\tau) = \mathbb{E}[Y(t)X(t + \tau)]$
2. Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{Y\hat{X}}(\tau)$
3. Si l'on souhaite que $R_{YX}(\tau) = R_{Y\hat{X}}(\tau)$, quelle doit être l'expression de la fonction de transfert du filtre $H(f)$?
4. Modéliser le comportement de ce filtre lorsque $S_X(f) \gg \sigma^2$ et lorsque $S_X(f) \ll \sigma^2$. Quel est le type de ce filtre si le signal $X(t)$ est en bande de base ?

Exercice 3



On considère la chaîne de transmission ci-dessus : le but est de retrouver le symbole aléatoire A envoyé à partir du signal reçu $Z[0]$. On cherche à maximiser le rapport signal sur bruit à la sortie du récepteur, c'est à dire à trouver le filtre de réception $h_r(t)$ permettant de limiter le plus possible l'influence du bruit. On notera E_{h_e} l'énergie totale du filtre de mise en forme, $h = h_e * h_r$, $N = B * h_r$, et $\frac{N_0}{2}$ la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien $B(t)$.

1. Calculer $Z(t)$ puis $Z[0]$ en fonction de A , de $h(t)$ et $N(t)$. Identifier les différents termes de l'expression.
2. On cherche à maximiser nos chances de retrouver a à partir de $z[0]$. Pour cela, on va tenter de maximiser le rapport signal sur bruit SNR défini par :

$$SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$$

où P_n est la puissance moyenne totale du signal aléatoire $n(t)$.

- (a) En utilisant la transformée de Fourier inverse, montrer que :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) df$$

- (b) En déduire une expression de $h(0)$ en fonction de $H_e(f)$ et $H_r(f)$.
 - (c) Calculer la puissance moyenne P_n du bruit $n(t)$ en fonction de N_0 et $H_r(f)$.
 - (d) En déduire l'expression du rapport signal sur bruit SNR en fonction de $H_e(f)$, $H_r(f)$ et N_0 .
3. Notre but est de trouver le filtre $H_r(f)$ qui permet de maximiser ce rapport signal sur bruit. Pour cela, on rappelle l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} c(x) d^*(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |d(x)|^2 dx \right)$$

On rappelle aussi que l'égalité dans cette équation a lieu si et seulement si $c = \lambda d$ où λ est un réel.

- (a) En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, donner une majoration du rapport signal sur bruit en fonction de N_0 et E_{h_e} .
- (b) Quelle est la condition sur $H_e(f)$ et $H_r(f)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal ?
- (c) Quelles est la valeur du SNR dans ce cas ?