Théorie du signal

Travaux Dirigés 8 : Révisions

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère un réel u qui n'est pas un entier, et le signal $x(t)$, périodique de période 2π, et défini sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$x(t) = \cos(ut) \qquad \text{pour } t \in [-\pi, +\pi[$$

1. Tracer le signal $x(t)$. Est-il continu sur $\mathbb{R}$?
2. Le signal $x(t)$ est-il pair ? Que peut-on en conclure sur ces coefficients de Fourier réels $a_k(x)$ et $b_k(x)$?
3. En calculant ces coefficients de Fourier, en déduire que
$$\cos(ut) \times \frac{\pi}{\sin(\pi u)} = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2u}{u^2 - k^2} \cos(kt)$$
4. En prenant $t = 0$, en déduire que
$$\frac{\pi}{\sin(\pi u)} = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2u}{u^2 - k^2}$$

Exercice 2

1. Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ d'une fonction triangulaire.
2. En utilisant le théorème de Parseval pour la fonction triangulaire, montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}$$

Exercice 3

On considère un réel $\alpha > 0$ et un système dont la relation d'entrée-sortie s'écrit

$$y(t) = e^{j2\pi\alpha t} \int_{-\infty}^{t} x(\tau) e^{-j2\pi\alpha\tau} d\tau$$

1. Le filtre est-il linéaire ? invariant temporellement ?
2. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre
3. Le filtre est-il causal ? stable ?

Exercice 4

1. En utilisant les propriétés de la dérivation, calculer la transformée de Laplace du signal $x(t) = t\,\mathrm{u}(t)$
2. Soit $\alpha > 0$ calculer la transformée de Laplace du signal $y(t) = (t - \alpha)\,\mathrm{u}(t - \alpha)$
3. On appelle $z(t)$ le signal $z(t) = \mathrm{tri}(t - 1)$. Montrer que
$$z(t) = t\,\mathrm{u}(t) - 2(t-1)\,\mathrm{u}(t-1) + (t-2)\,\mathrm{u}(t-2)$$
4. En déduire la transformée de Laplace du signal $z(t)$

Exercice 5

On considère le signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$X(f) = \begin{cases} j\sin(\pi f) & \text{si } -1 < f < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de $\mathrm{Im}\,(X(f))$
2. Que peut-on dire sur le signal $x(t)$?
3. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale F_e qu'on l'on peut choisir afin de respecter le critère de Nyquist ?
4. On choisit $F_e = 2$ Hz.
   (a) Tracer l'allure de la partie imaginaire du spectre $X_e(f)$ obtenu après échantillonnage idéal.
   (b) En déduire le signal échantillonné correspondant $x_e(t)$
   (c) Quel est l'expression du signal $\hat{x}(t)$ reconstruit par filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{F_e}{2}$? En déduire l'expression de $x(t)$