

Théorie du signal

Séries de Fourier

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1^{ère} année
2019-2020

Plan du cours

1. Principe de la série de Fourier

- 1.1 Définition
- 1.2 Interprétation
- 1.3 Théorème de Parseval

3. Etude mathématique de la série de Fourier

- 3.1 Cas des signaux discontinus
- 3.2 Dérivation
- 3.3 Cas des distributions

2. Propriétés de la série de Fourier

- 2.1 Signaux réels
- 2.2 Linéarité
- 2.3 Ajout d'une composante continue
- 2.4 Translation

4. Formulation réelle de la série de Fourier

- 4.1 Définition
- 4.2 Interprétation
- 4.3 Théorème de Parseval

Sommaire

Principe de la série de Fourier

- 1.1 Définition
- 1.2 Interprétation
- 1.3 Théorème de Parseval

Signaux périodiques

- On considère dans cette partie du cours l'espace $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des signaux à puissance finie, continus et périodiques de période T à valeurs complexes.
- Nous allons utiliser les outils à notre disposition (notamment la notion de produit scalaire) pour étudier et représenter ces signaux périodiques :

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) y^*(t) dt$$

- Pour cela nous allons utiliser une base orthonormale, et décomposer les signaux périodiques sur cette base : il s'agit de la base de Fourier

Base de Fourier

On appelle **base de Fourier** la base de fonctions

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_k(t) = e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- ▶ La fonction $\Phi_k(t)$ a pour période fondamentale $T_k = \frac{T}{k}$ et pour fréquence fondamentale $f_k = \frac{k}{T}$
- ▶ Les fonctions $\Phi_k(t)$ sont continues et périodiques de période T
- ▶ La famille $\{\Phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Etude de $\Phi_k(t)$

- ▶ On peut écrire

$$\Phi_k(t) = e^{j\frac{2\pi k}{T}t} = e^{j2\pi\left(\frac{k}{T}\right)t}$$

Sinusoïde complexe de fréquence fondamentale $f_k = \frac{k}{T}$ et de période fondamentale $T_k = \frac{T}{k}$

- ▶ Comme $\Phi_k(t)$ est périodique de période fondamentale $T_k = \frac{T}{k}$, elle est périodique de période mT_k pour tout m entier, donc a fortiori de période T
- ▶ La base est orthonormale car on a :

- ▶ Orthogonalité

$$\forall k \neq l \quad \langle \Phi_k | \Phi_l \rangle = 0$$

- ▶ Normalisation

$$\forall k \quad \|\Phi_k\| = 1$$

Etude de $\Phi_k(t)$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k | \Phi_l \rangle &= \frac{1}{T} \int_{[T]} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} e^{-j\frac{2\pi l}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{[T]} e^{j\frac{2\pi}{T}(k-l)t} dt \end{aligned}$$

- ▶ Si $k \neq l$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k | \Phi_l \rangle &= \frac{1}{T} \left[\frac{T}{j2\pi(k-l)} e^{j\frac{2\pi}{T}(k-l)t} \right]_{t=0}^{t=T} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ▶ Si $k = l$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k | \Phi_l \rangle &= \frac{1}{T} [1]_{t=0}^{t=T} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Décomposition en série de Fourier

- ▶ On appelle **décomposition en série de Fourier** l'écriture d'un signal $x(t)$ de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur la base de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

avec
$$c_k(x) = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

- ▶ $c_k(x)$ est appelé **coefficient de Fourier** de $x(t)$
- ▶ $c_k(x)$ est associé à la fréquence $f_k = \frac{k}{T}$

Existence

- L'existence de cette décomposition est liée au fait que la base de Fourier $\{\Phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- On a donc pour tout signal $x(t)$ de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle x | \Phi_k \rangle \Phi_k(t)$$

- En remplaçant $\Phi_k(t)$ par son expression et en utilisant le produit scalaire défini pour les signaux périodiques, on retrouve exactement la décomposition en série de Fourier !

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

$$\text{avec } c_k(x) = \langle x | \Phi_k \rangle$$

Interprétation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

- Tout signal périodique de période T peut s'exprimer comme une somme pondérée d'exponentielles complexes de fréquences $f_k = \frac{k}{T}$
- Le coefficient $c_k(x)$ permet de connaître la contribution de la sinusoïde complexe $e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$ dans cette décomposition. Attention, sauf cas particulier, le coefficient $c_k(x)$ est un nombre complexe !

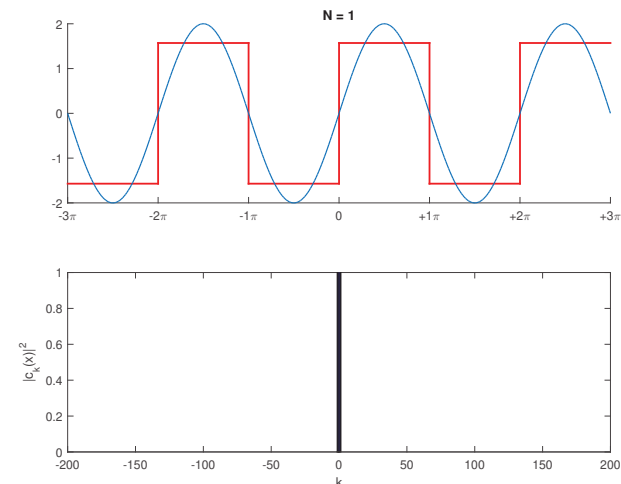
Interprétation des termes

On peut réécrire le développement en série de Fourier sous la forme

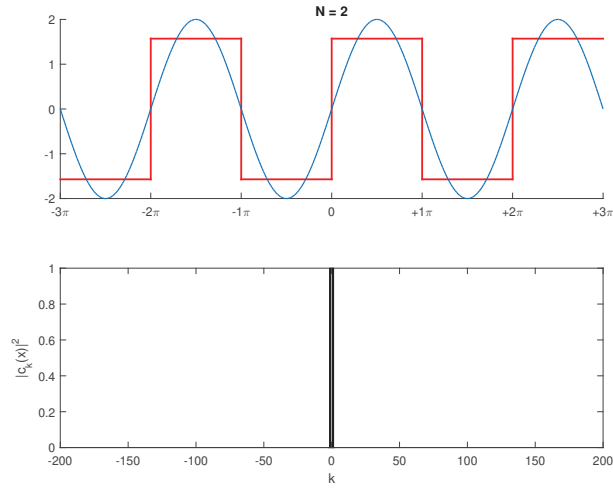
$$x(t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} + c_{-k}(x) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} \right]$$

- Le terme $c_0(x)$ est une constante qui ne dépend pas du temps. On l'appelle souvent **composante continue**. Elle correspond la partie du signal qui ne varie pas en fonction du temps et est égale à la valeur moyenne du signal sur une période.
- La partie du signal $c_1(x) e^{j \frac{2\pi}{T} t} + c_{-1}(x) e^{-j \frac{2\pi}{T} t}$ qui correspond à la fréquence $f = \frac{1}{T}$ (donc à la fréquence fondamentale) est souvent appelée **fondamentale**.
- Les fonctions $c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} + c_{-k}(x) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t}$ sont appelées **harmoniques de rang k** . Elles sont associées aux fréquences physiques $f_k = \frac{k}{T}$.
- On peut également séparer les k pairs et les k impairs : on parle dans ce cas d'**harmoniques paires** et d'**harmoniques impaires**.

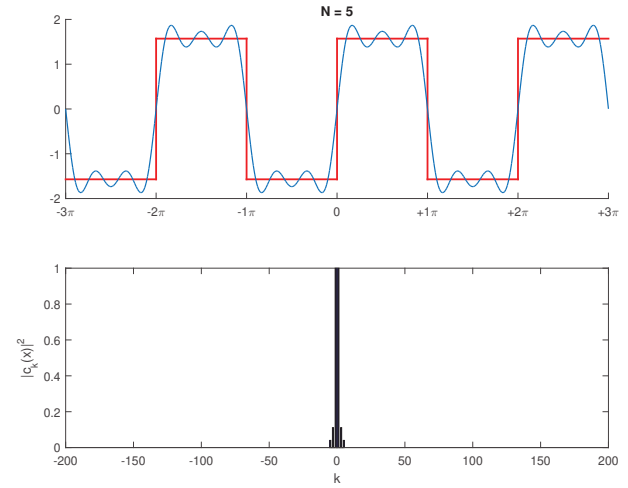
Exemple de décomposition



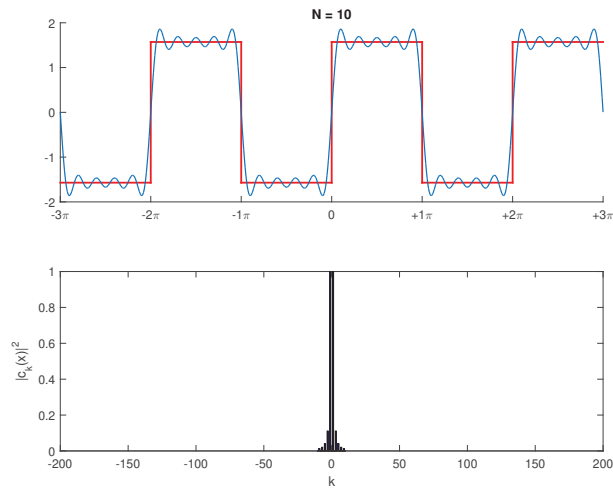
Exemple de décomposition



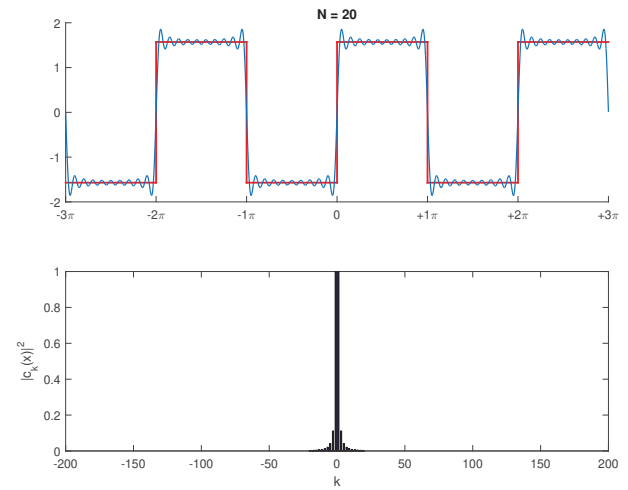
Exemple de décomposition



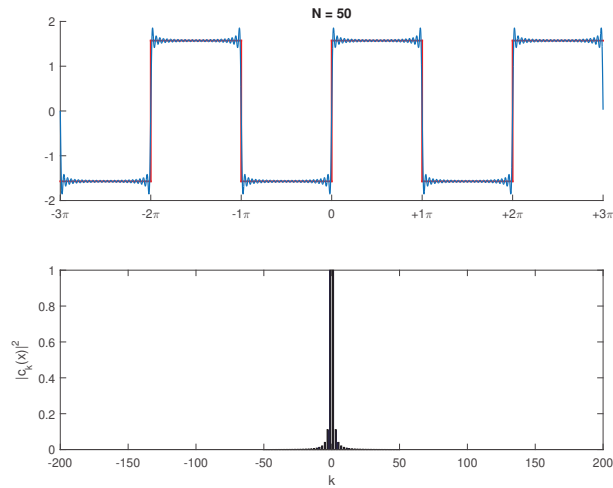
Exemple de décomposition



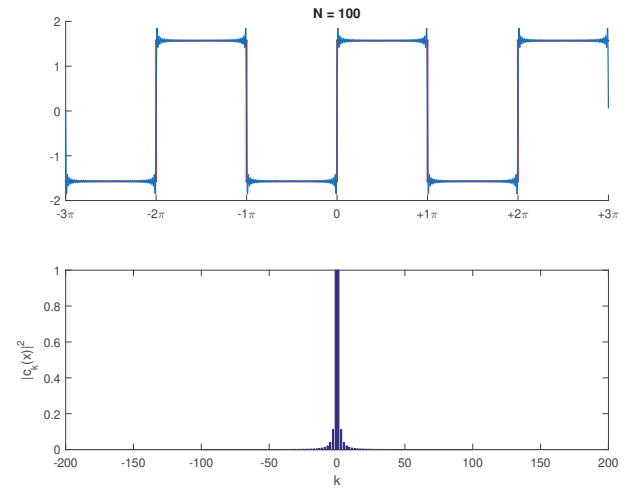
Exemple de décomposition



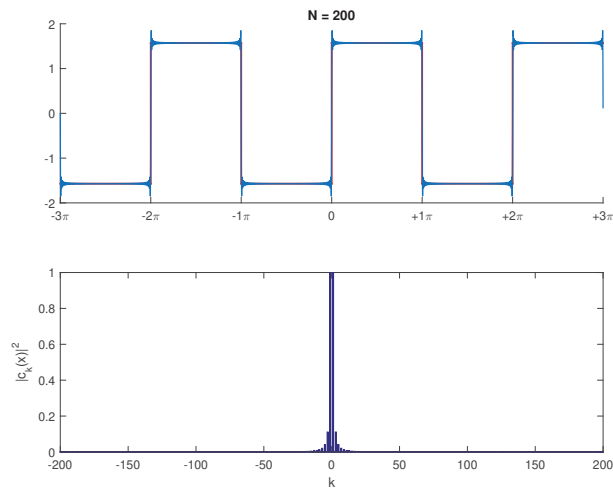
Exemple de décomposition



Exemple de décomposition



Exemple de décomposition



Calcul pratique

- Dans le cas général pour calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal, il faut calculer les coefficients

$$c_k(x) = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} dt$$

- En revanche, si le signal $x(t)$ contient des fonctions sinus ou cosinus, il est souvent plus commode d'utiliser les formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Exemple de la sinusoïde

Sinusoïde $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

- On a $T = \frac{1}{f_0}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \\ &= \frac{e^{j\frac{2\pi t}{T}} - e^{-j\frac{2\pi t}{T}}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi(1)}{T}t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi(-1)}{T}t} \end{aligned}$$

- Par identification on a

$$c_{-1}(x) = -\frac{1}{2j} \quad c_1(x) = \frac{1}{2j} \quad \text{et } c_k(x) = 0 \quad \forall k \neq \{-1, 1\}$$

Exemple d'utilisation

Sinusoïde $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

- Technique 1 : calcul direct

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{[T]} \sin^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2}$$

- Technique 2 : calcul avec Parseval

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2 = \left| -\frac{1}{2j} \right|^2 + \left| \frac{1}{2j} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Théorème de Parseval

- En utilisant les propriétés démontrées pour les produits scalaires, on peut démontrer une propriété fondamentale appelée **théorème de Parseval**

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2$$

- Cette propriété est une conséquence directe du fait que la base de Fourier $\{\Phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$P_x = \|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle x | \Phi_k \rangle|^2$$

Interprétation

- On s'aperçoit que la notion de puissance peut être estimée dans le domaine du temps en utilisant directement $x(t)$ mais également, et de façon parfaitement équivalente dans le domaine de Fourier
- Ainsi, il est possible d'étudier un signal périodique de période T en s'intéressant uniquement aux coefficients $c_k(x)$
- De la même façon, un certain nombre de propriétés temporelles du signal $x(t)$ vont avoir des conséquences par effet miroir sur les coefficients de Fourier $c_k(x)$

Sommaire

Propriétés de la série de Fourier

- 2.1 Signaux réels
- 2.2 Linéarité
- 2.3 Ajout d'une composante continue
- 2.4 Translation

Cas d'un signal réel : conséquences

- ▶ Si le signal est réel, il suffit donc de calculer $c_k(x)$ pour $k \geq 0$
- ▶ De façon réciproque, si l'on veut démontrer qu'un signal est réel, pair ou impair, on peut travailler directement sur les coefficients de Fourier
- ▶ Tout comme la notion de puissance, la notion de parité peut se démontrer au choix dans le domaine du temps ou dans le domaine des fréquences
- ▶ Exemple : pour la sinusoïde $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ on a

$$c_{-1}(x) = -\frac{1}{2j} \quad c_1(x) = \frac{1}{2j} \quad \text{et } c_k(x) = 0 \quad \forall k \neq \{-1, 1\}$$

coefficients imaginaires pur et impairs donc signal réel impair

Cas d'un signal réel

On peut démontrer les trois propriétés suivantes :

- ▶ Si $x(t)$ est réel

$$c_{-k}(x) = c_k^*(x) \quad \text{symétrie hermitienne}$$

- ▶ Si $x(t)$ est réel et pair

$$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{R} & \text{réel} \\ c_{-k}(x) = c_k(x) & \text{pair} \end{cases}$$

- ▶ Si $x(t)$ est réel et impair

$$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* & \text{imaginaire pur} \\ c_{-k}(x) = -c_k(x) & \text{impair} \end{cases}$$

Les réciproques sont également vraies.
Démonstration en exercice

Linéarité

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et deux réels λ et μ .

- ▶ Si l'on note

$$z(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$$

- ▶ Alors on a

$$\forall k \quad c_k(z) = \lambda c_k(x) + \mu c_k(y)$$

La démonstration est évidente par linéarité de l'intégrale

Ajout d'une composante continue

Soit $x(t)$ un signal de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et un réel λ

- Si l'on note

$$y(t) = x(t) + \lambda$$

- Alors on a

$$\begin{cases} c_0(y) = c_0(x) + \lambda & k = 0 \\ c_k(y) = c_k(x) & k \neq 0 \end{cases}$$

- Attention à ne pas rajouter λ sur tous les coefficients ! L'ajout d'une constante n'agit que sur le coefficient $c_0(y)$, donc sur la composante continue.

Démonstration en exercice

Translation

Soit $x(t)$ un signal de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et un réel t_0

- Si l'on note

$$y(t) = x(t - t_0)$$

- Alors on a

$$\forall k \quad c_k(y) = e^{-j\frac{2\pi k}{T}t_0} c_k(x)$$

Démonstration en exercice

Bilan des propriétés

$x(t)$ réel	$c_{-k}(x) = c_k^*(x)$ (symétrie hermitienne)
$x(t)$ réel et pair	$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{R} & \text{réel} \\ c_{-k}(x) = c_k(x) & \text{pair} \end{cases}$
$x(t)$ réel et impair	$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* & \text{imaginaire pur} \\ c_{-k}(x) = -c_k(x) & \text{impair} \end{cases}$
$z(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$	$c_k(z) = \lambda c_k(x) + \mu c_k(y)$
$y(t) = x(t) + \lambda$	$\begin{cases} c_0(y) = c_0(x) + \lambda & k = 0 \\ c_k(y) = c_k(x) & k \neq 0 \end{cases}$
$y(t) = x(t - t_0)$	$c_k(y) = e^{-j\frac{2\pi k}{T}t_0} c_k(x)$

Sommaire

Etude mathématique de la série de Fourier

- 3.1 Cas des signaux discontinus
- 3.2 Dérivation
- 3.3 Cas des distributions

Notion de convergence

- Lorsque l'on écrit

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

le signe égal n'a pas le sens normal attendu

- L'écriture sous forme d'une somme infinie fait référence à la notion de convergence (ici en moyenne quadratique). Ce que l'on dit en réalité c'est que

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

converge vers $x(t)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, au sens de la norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\hat{x}_N(t) - x(t)\| = 0$$

Cas des signaux discontinus

Considérons un signal $x(t)$, de puissance finie, périodique de période T et comportant un nombre fini de discontinuités finies en t_i .

- Pour les temps t où $x(t)$ est continue, on a bien

$$\hat{x}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} = x(t)$$

- Pour les temps t_i où $x(t)$ présente un point de discontinuités on a

$$\hat{x}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} = \frac{x(t_i^-) + x(t_i^+)}{2}$$

Notion de convergence

- En réalité, le signal $x(t)$ et le signal $\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{x}_N(t)$$

ne sont pas nécessairement égaux pour tout t , mais la puissance moyenne totale de la différence de ces deux signaux est nulle.

- Deux cas de figure

- Si $x(t)$ est continu sur $\mathbb{R}$, on a bien l'égalité $\forall t \in \mathbb{R}$. Il s'agit du cas que nous avons traité jusqu'à présent
- Si $x(t)$ contient un nombre fini de discontinuités finies, on peut tout de même définir la notion de série de Fourier, mais dans ce cas là, il existe des instants t tels que

$$x(t) \neq \hat{x}(t)$$

Cas des signaux discontinus

- Grâce à ces propriétés, on voit que l'on peut étendre la notion de série de Fourier pour les signaux périodiques présentant quelques discontinuités
- Pour tous les temps où il n'y a pas de discontinuités, il n'y a aucun problème. En revanche il faut faire attention aux points de discontinuités et bien comprendre que la série de Fourier prend des valeurs particulières en ces points

Dérivation

- En tant que telle, la série de Fourier

$$\hat{x}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

est une fonction infiniment dérivable. Mais il se peut que ce ne soit pas le cas du signal $x(t)$!

- Donc attention, ce n'est pas parce que l'on peut dériver $\hat{x}(t)$ que l'on peut dériver $x(t)$
- En revanche, si $x(t)$ est dérivable, alors on a une égalité entre la dérivée de $x(t)$ et la dérivée de $\hat{x}(t)$

$$x'(t) = \hat{x}'(t)$$

Dérivation

- On a :

$$\begin{aligned} x'_N(t) &= \left(\sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \right)' \\ &= \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \left(e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \right)' \\ &= \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \frac{j2\pi k}{T} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \end{aligned}$$

- En prenant la limite on a

$$\hat{x}'(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \frac{j2\pi k}{T} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- Donc

$$\hat{x}'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \frac{j2\pi k}{T} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

Dérivation

- Si $x(t)$ est dérivable, alors

$$x'(t) = \hat{x}'(t)$$

et donc

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \frac{j2\pi k}{T} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- Par unicité de la décomposition en série de Fourier, on a donc

$$c_k(x') = \frac{j2\pi k}{T} c_k(x)$$

Dérivation : bilan

- Si $x(t)$ est un signal à puissance finie, périodique de période T , et n fois dérivable alors $x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ admet une décomposition en série de Fourier et on a

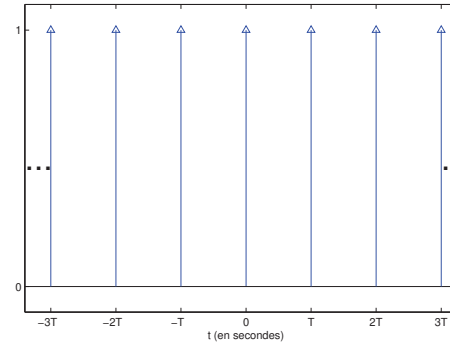
$$c_k(x^{(n)}) = \left(\frac{j2\pi k}{T} \right)^n c_k(x)$$

- En réalité on pourrait démontrer qu'il suffit pour que cela soit vrai que la fonction soit $\mathcal{C}^{(n-1)}$ et $\mathcal{C}^{(n)}$ par morceaux
- La dérivation dans le domaine temporel se transforme en produit dans le domaine de Fourier

Cas des distributions

- ▶ La série de Fourier est définie pour les signaux à puissance finie, continus et périodiques de période T
- ▶ Nous avons vu qu'il était possible d'étendre cette définition lorsque les signaux comportent un nombre fini de discontinuités finies, en faisant bien attention à distinguer ces points lors des calculs
- ▶ De la même façon on pourrait montrer que pour certaines distributions périodiques admettent également des développements en série de Fourier
- ▶ Dans le cadre du cours, nous n'allons utiliser ceci que pour une seule distribution : le peigne de Dirac

Peigne de Dirac



$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- ▶ Le peigne de Dirac $\text{III}_T(t)$ est une distribution
- ▶ Il s'agit d'une version périodisée du Dirac : un Dirac de masse 1 apparaît à chaque temps $t = nT$
- ▶ C'est une *signal* périodique de période fondamentale T

Peigne de Dirac

Admettons que $\text{III}_T(t)$ admette une décomposition en série de Fourier :

$$\begin{aligned} c_k(\text{III}_T) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} \text{III}_T(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \text{III}_T(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T} \times 0} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Peigne de Dirac

- ▶ Le peigne de Dirac admet donc une décomposition en série de Fourier et on a

$$c_k(\text{III}_T) = \frac{1}{T}$$

- ▶ Et on peut écrire

$$\text{III}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

Sommaire

Formulation réelle de la série de Fourier

- 4.1 Définition
- 4.2 Interprétation
- 4.3 Théorème de Parseval

Reformulation de la série de Fourier

- La forme complexe de la série de Fourier s'écrit

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

- Cette formulation peut être compliquée à appréhender surtout si $x(t)$ est réel, car les coefficients $c_k(x)$ sont complexes et les sinusoides $e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$ utilisées sont également complexes
- Dans la suite on considèrera uniquement **des signaux réels**
- Si le signal $x(t)$ est réel, on utilise parfois une formulation réelle de la série de Fourier qui permet d'améliorer l'intuition et l'interprétabilité
- On utilisera pour cela une propriété déjà démontrée que si $x(t)$ est réel on a

$$c_{-k}(x) = c_k^*(x)$$

Reformulation de la série de Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \\ &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(x) \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \\ &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(x) \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) - j \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \\ &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(c_k(x) + c_k^*(x)) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + (jc_k(x) - jc_k^*(x)) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \end{aligned}$$

Liens entre les coefficients

- On peut écrire

$$c_k(x) = \operatorname{Re}(c_k(x)) + j \operatorname{Im}(c_k(x))$$

- Dans ce cas

$$\begin{aligned} c_k(x) + c_k^*(x) &= \operatorname{Re}(c_k(x)) + j \operatorname{Im}(c_k(x)) + \operatorname{Re}(c_k(x)) - j \operatorname{Im}(c_k(x)) \\ &= 2 \operatorname{Re}(c_k(x)) \end{aligned}$$

- On a également

$$\begin{aligned} jc_k(x) - jc_k^*(x) &= j \operatorname{Re}(c_k(x)) - \operatorname{Im}(c_k(x)) - j \operatorname{Re}(c_k(x)) - \operatorname{Im}(c_k(x)) \\ &= -2 \operatorname{Im}(c_k(x)) \end{aligned}$$

Série de Fourier réelle

Soit $x(t)$ un signal **réel**, de puissance finie, continu et périodique de période T . La forme réelle de la série de Fourier s'écrit

$$x(t) = a_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right]$$

avec

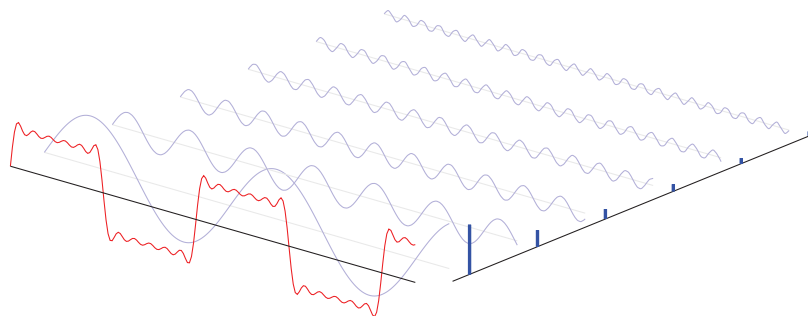
$$\begin{cases} a_0(x) = c_0(x) & k = 0 \\ b_0(x) = 0 & k = 0 \\ a_k(x) = 2 \operatorname{Re}(c_k(x)) & k \geq 1 \\ b_k(x) = -2 \operatorname{Im}(c_k(x)) & k \geq 1 \end{cases}$$

Interprétation

$$x(t) = a_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right]$$

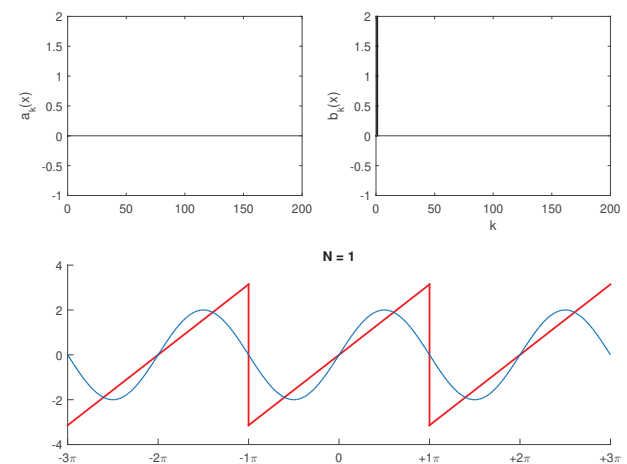
- Grâce à cette formulation, on comprend mieux que la série de Fourier vise à écrire le signal $x(t)$ sous forme d'une somme d'une infinité de sinusoides
- Tous les coefficients $a_k(x)$ et $b_k(x)$ sont maintenant des réels
- $a_0(x)$ est la composante continue du signal, c'est à dire sa partie constante
- Les coefficients $a_k(x)$ et $b_k(x)$ sont liés à l'amplitude de l'harmonique de rang k

Exemple

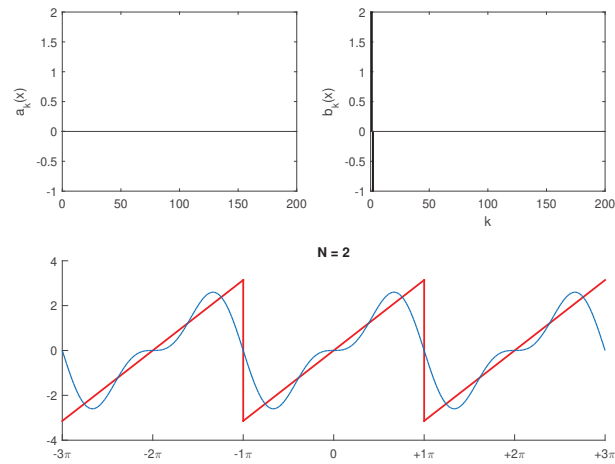


- En rouge : le signal à analyser
- En bleu : les sinusoides et coefficients de Fourier à utiliser

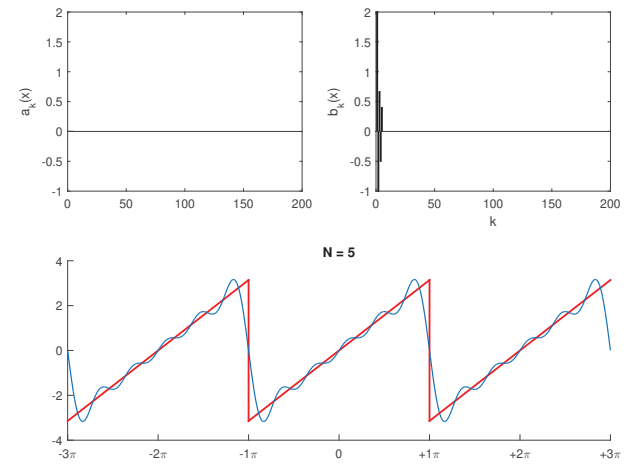
Exemple de décomposition



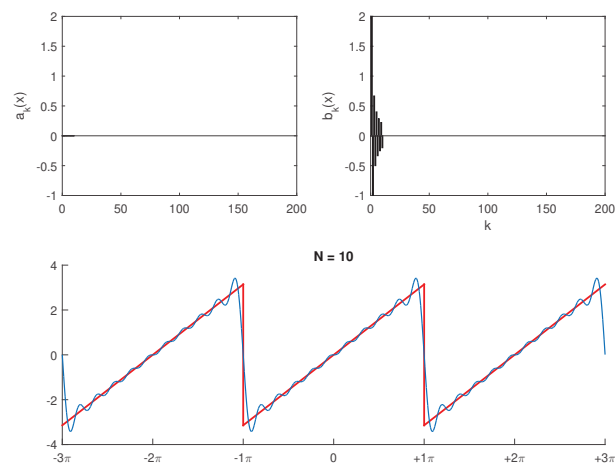
Exemple de décomposition



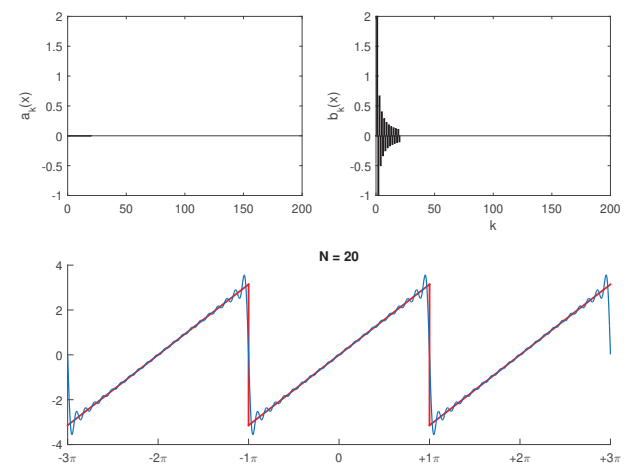
Exemple de décomposition



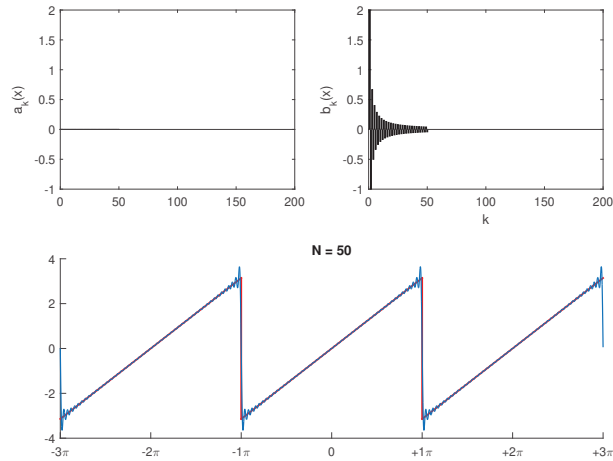
Exemple de décomposition



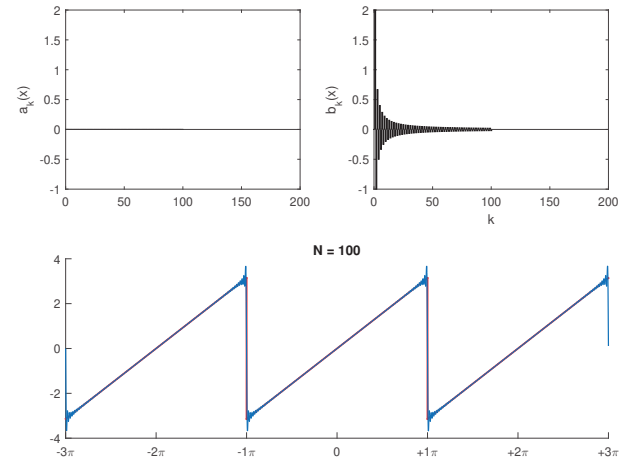
Exemple de décomposition



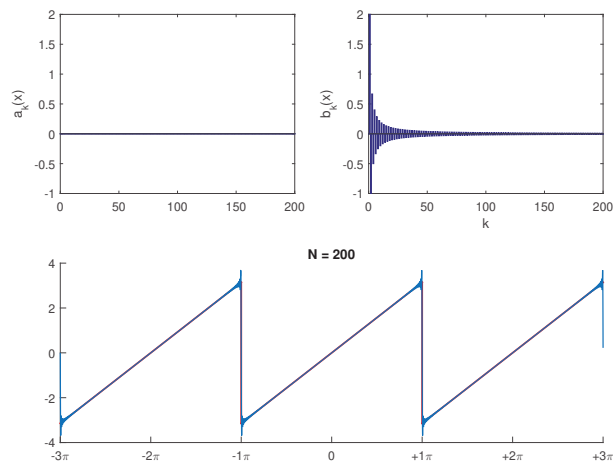
Exemple de décomposition



Exemple de décomposition



Exemple de décomposition



Calcul des coefficients

- En utilisant les propriétés :

$$\begin{cases} a_0(x) = c_0(x) & k = 0 \\ b_0(x) = 0 & k = 0 \\ a_k(x) = 2 \operatorname{Re}(c_k(x)) & k \geq 1 \\ b_k(x) = -2 \operatorname{Im}(c_k(x)) & k \geq 1 \end{cases}$$

- On peut avoir des formules explicites pour les coefficients

$$\begin{cases} a_0(x) = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) dt & k = 0 \\ b_0(x) = 0 & k = 0 \\ a_k(x) = \frac{2}{T} \int_{[T]} x(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt & k \geq 1 \\ b_k(x) = \frac{2}{T} \int_{[T]} x(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt & k \geq 1 \end{cases}$$

Calcul des coefficients

- A l'inverse, on peut retrouver les coefficients $c_k(x)$ à partir de $a_k(x)$ et $b_k(x)$

$$\begin{cases} c_0(x) = a_0(x) & k = 0 \\ c_k(x) = \frac{a_k(x) - jb_k(x)}{2} & k \geq 1 \\ c_{-k}(x) = \frac{a_k(x) + jb_k(x)}{2} & k \geq 1 \end{cases}$$

- Certaines propriétés démontrées sur les coefficients complexes peuvent se transposer sur les coefficients réels

Quelques propriétés

- Le signal $x(t)$ est réel et pair si et seulement si

$$b_k(x) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

- Le signal $x(t)$ est réel et impair si et seulement si

$$a_k(x) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Démonstration en exercice

Théorème de Parseval

- En utilisant le fait que

$$|c_k(x)|^2 = \frac{1}{4} (|a_k(x)|^2 + |b_k(x)|^2) \quad \text{pour } k \geq 1$$

on peut donner une formulation du théorème de Parseval avec les coefficients réels

$$P_x = |a_0(x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k(x)|^2 + |b_k(x)|^2)$$

- La puissance d'un signal réel est la somme des puissances des composantes sinusoïdales qui le composent