Théorie du signal

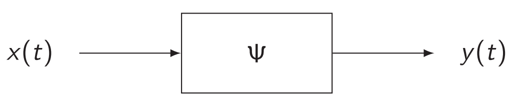
Modélisation des systèmes

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Plan du cours

Qu'est-ce qu'un système ?



- On appelle **système** tout dispositif qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$
- Défini par une la transformation Ψ

$$y(t) = \Psi\left(x(t)\right)$$

Etude des systèmes

- Dans ce cours, nous allons voir comment caractériser ces systèmes et les étudier
- Nous allons également décrire les systèmes les plus fréquemment utilisés en traitement du signal, électronique et télécommunications
- Les systèmes ont pour but de modifier les propriétés des signaux pris en entrée : nous verrons également comment ces phénomènes se manifestent

Sommaire

Propriétés des systèmes

Propriétés des systèmes

Nous allons étudier plusieurs propriétés fondamentales des systèmes

- Homogénéité
- Linéarité
- Invariance temporelle
- Systèmes dynamiques/instantanés
- Causalité
- Stabilité

Homogénéité

Un système est **homogène** si ses entrées et sorties sont des signaux de même type (analogique ou numérique).

Exemples

- Un amplificateur analogique est un système homogène (entrée analogique / sortie analogique)
$$y(t) = Ax(t)$$
- Un échantillonneur n'est pas un système homogène (entrée analogique / sortie numérique)
$$y[n] = x(nT_e)$$

Linéarité

Un système est **linéaire** si, pour des réels $a_1, \ldots, a_N$ et des signaux $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ on a :

$$\Psi\left(\sum_{n=1}^{N} a_i x_i(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} a_i \Psi\left(x_i(t)\right)$$

Exemples

- Un amplificateur analogique $\Psi\left(x(t)\right) = Ax(t)$ est un système linéaire
$$\Psi\left(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right) = A \times \left(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right) = a_1(Ax_1(t)) + a_2(Ax_2(t))$$
- Le système $\Psi\left(x(t)\right) = (x(t))^2$ n'est pas un système linéaire
$$\Psi\left(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right) = \left(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right)^2 \neq a_1(x_1(t))^2 + a_2(x_2(t))^2$$

La linéarité en pratique

- Les systèmes linéaires sont beaucoup plus faciles à étudier que les systèmes non linéaires, car ils peuvent être décrits grâce à des équations linéaires
- Malheureusement, en pratique, aucun système n'est rigoureusement linéaire...
- Dans ce cas, il est courant de linéariser le comportement d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire pour obtenir un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire

Invariance temporelle

Un système est **invariant temporellement** si son comportement ne varie pas avec le temps, c'est à dire que

$$\text{si } y(t) = \Psi\left(x(t)\right), \text{ alors } \forall t_0 \in \mathbb{R},\ y(t-t_0) = \Psi\left(x(t-t_0)\right)$$

Exemples

- Un amplificateur analogique $y(t) = Ax(t)$ est un système linéaire

$$y(t-t_0) = Ax(t-t_0)$$

- Le système $y(t) = tx(t)$ n'est pas un système linéaire

$$\Psi\left(x(t-t_0)\right) = tx(t-t_0) \neq y(t-t_0)$$

L'invariance temporelle en pratique

- Certains systèmes ne sont volontairement pas invariants temporellement car on souhaite qu'ils réagissent particulièrement à certains instants ou plages temporelles (exemple : un enregistreur qui commence à un certain temps)
- D'autres ne le sont pas car on souhaite qu'ils s'adaptent dans le temps afin d'assurer le meilleur traitement possible à tout instant (cf cours de MED)
- Aucun système réel ne peut être scrupuleusement invariant temporellement, car il subit nécessairement une usure ou un vieillissement. Néanmoins dans ce cas, on suppose que cette modification est lente par rapport à l'échelle des temps qui nous concerne.

Systèmes dynamiques/instantanés

Un système est **instantané** si le comportement de la sortie à $t = t_0$ ne dépend que de la valeur de l'entrée à ce même instant $t = t_0$

Un système est **dynamique** si le comportement de la sortie à $t = t_0$ dépend de certaines valeurs de l'entrée à $t \neq t_0$

Exemples

- Un amplificateur analogique $y(t) = Ax(t)$ est un système instantané : $y(t_0)$ ne dépend que de $x(t_0)$
- Un système intégrateur $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ est un système dynamique : $y(t_0)$ dépend de toutes les valeurs de $x(t)$ entre $-\infty$ et t_0
- Un système retardateur $y(t) = x(t-\tau)$ est un système dynamique : $y(t_0)$ dépend de $x(t_0-\tau)$

Causalité

Un système est **causal** si le comportement de la sortie à $t = t_0$ ne dépend que des valeurs de l'entrée pour $t \leq t_0$

Un système est **strictement causal** si le comportement de la sortie à $t = t_0$ ne dépend que des valeurs de l'entrée pour $t < t_0$

- Un système intégrateur $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$ est un système causal : $y(t_0)$ ne dépend pas des valeurs de $x(t)$ pour $t > t_0$
- Le système $y(t) = x(t + \tau)$ avec $\tau > 0$ n'est pas un système causal : $y(t_0)$ dépend de $x(t_0 + \tau)$ qui n'est pas encore arrivé

La causalité en pratique

- En pratique il est difficile d'envisager un système réel qui ne soit pas causal : comment la sortie à un instant t_0 pourrait-elle dépendre des valeurs futures de l'entrée ?
- Dans la pratique il est donc impossible de concevoir un système physiquement réalisable qui soit non causal
- En revanche il arrive en traitement du signal que l'on traite les données a posteriori ou de façon *offline* : dans ce cas il est possible d'appliquer des traitements non causaux.

Stabilité

Un système est **stable** si toute entrée bornée en amplitude donne une sortie également bornée en amplitude

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall t, |x(t)| < M \Rightarrow \exists M' \in \mathbb{R}, \forall t, |\Psi(x(t))| < M'$$

Exemples

- Un amplificateur analogique $y(t) = Ax(t)$ ou un système retardateur $y(t) = x(t - \tau)$ sont des systèmes stables
- Un système intégrateur $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$ n'est pas un système stable (exemple avec le signal $x(t) = 1$).

La stabilité en pratique

- La stabilité ainsi définie est appelée stabilité EBSB ou BIBO
  - EBSB : Entrée Bornée - Sortie Bornée
  - BIBO : Bounded Input - Bounded Output
- Cette stabilité exprime le fait que le système ne va pas s'emballer et diverger lorsqu'on lui enverra une entrée bornée

Sommaire

Systèmes Linéaires et Invariants (SLI)

Systèmes Linéaires et Invariants

- Un cas particulier très courant est celui des systèmes homogènes, linéaires et invariants que l'on nomme souvent **systèmes SLI**
- On peut démontrer la propriété suivante

> Soit Ψ un système linéaire et invariant, alors il existe une fonction $h(t)$ appelée **réponse impulsionnelle**, telle que
>
> $$y(t) = \Psi\left(x(t)\right) = x(t) * h(t)$$

- En particulier, si l'entrée du système est une impulsion de Dirac ($x(t) = \delta(t)$), la sortie du système est exactement la réponse impulsionnelle $h(t)$

Systèmes Linéaires et Invariants

- La plupart des systèmes utilisés en électronique sont des systèmes SLI (parfois uniquement autour d'un point de fonctionnement) :
  - Circuit RC
  - Amplificateur opérationnel (dans son domaine de linéarité)
- Dans le cas des systèmes SLI, on parle de **filtrage linéaire** et la réponse impulsionnelle $h(t)$ détermine totalement les propriétés du système

Réponse impulsionnelle / Réponse en fréquence

- La relation $y(t) = (x * h)(t)$ dans le domaine temporelle s'écrit $Y(f) = X(f)H(f)$ dans le domaine des fréquences
- On définit donc $H(f)$ et on appelle **réponse en fréquence** ou **fonction de transfert** la quantité

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}}$$

- On a

$$\boxed{H(f) = \mathcal{TF}\left\{h(t)\right\}}$$

Interprétation du filtrage linéaire

- Dans le domaine temporel, le filtrage linéaire correspond à un produit de convolution par la réponse impulsionnelle $h(t)$
- Dans le domaine fréquentiel, le filtrage linéaire correspond à une multiplication du spectre par la quantité $H(f)$
- En particulier, un filtre linéaire ne peut pas créer de fréquences nouvelles. Le support fréquentiel du signal de sortie $Y(f)$ est nécessairement inclus dans celui du signal d'entrée $X(f)$

Réponses d'un SLI

Pour un SLI, on peut définir plusieurs types de réponses typiques

- La réponse impulsionnelle (entrée égale à un Dirac)

$$x(t) = \delta(t)$$

- La réponse indiciellle (entrée égale à un échelon de Heaviside)

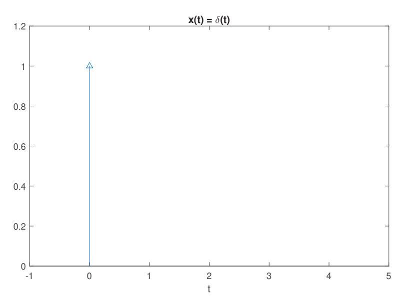
$$x(t) = \mathrm{u}(t)$$

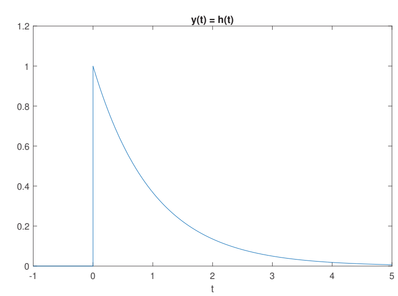
- La réponse harmonique (entrée égale à une sinusoïde complexe)

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

Réponse impulsionnelle

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{\Psi} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

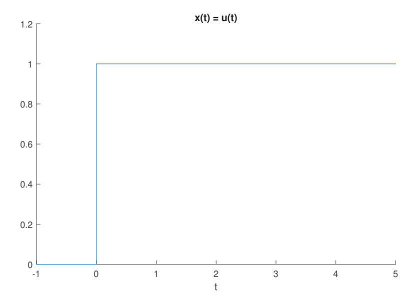


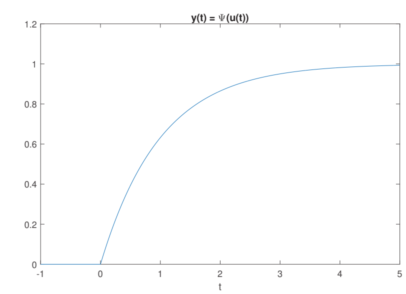


- Phénomène d'entrée infiniment court (par exemple un choc en mécanique) qui va avoir des répercutions durant une certaine durée
- Le temps de réponse d'un SLI est lié à la durée de sa réponse impulsionnelle, qui est souvent infinie dans les systèmes physiques réels

Réponse indicielle

$$x(t) = \mathrm{u}(t) \longrightarrow \boxed{\Psi} \longrightarrow y(t) = \Psi(\mathrm{u}(t))$$





- Correpond à un signal d'entrée dont le temps d'établissement est très inférieur aux temps caractéristiques du système (exemple de l'interrupteur)
- Lorsque le système est stable, la réponse indicielle converge vers une valeur limite appelée valeur stationnaire

Réponse indicielle

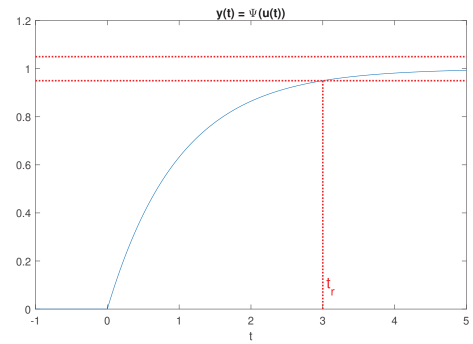
- Si $x(t) = \mathrm{u}(t)$, on a

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- $y(t)$ est la primitive de $h(t)$ nulle en $t = -\infty$

$$\boxed{\Psi\left(\mathrm{u}(t)\right) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau}$$

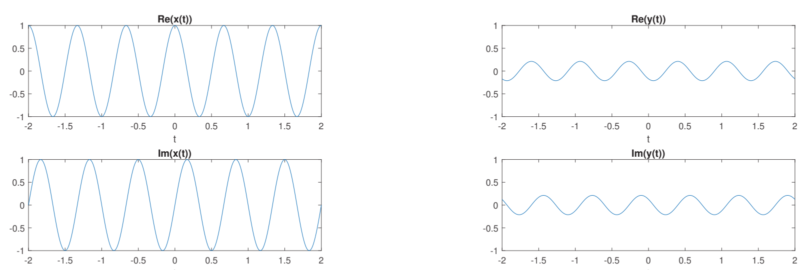
Réponse indicielle



- La réponse indicielle de ce système stable converge vers une valeur finie y_∞
- On caractérise la réponse indicielle par certains temps caractéristiques
  - Temps de réponse à 5% t_r : temps au bout duquel la réponse indicielle reste dans la fourchette 0.95 y_∞ - 1.05 y_∞
  - Temps de montée t_m : temps séparant les passages de la réponse indicielle entre 0.1 y_∞ et 0.9 y_∞

Réponse harmonique

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{\Psi} \longrightarrow y(t) = \Psi\left(e^{j2\pi f_0 t}\right)$$



- Réponse du système à une sinusoïde complexe de fréquence f_0
- Son étude permet de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques du système comme la fréquence de coupure, sa stabilité et sa bande passante

Réponse harmonique

- Si $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, on a

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 \tau} h(\tau)d\tau \\ &= e^{j2\pi f_0 t} H(f_0) \end{aligned}$$

- La réponse d'un SLI à un signal harmonique... est un signal harmonique de même fréquence fondamentale !
- Le coefficient $H(f_0)$, a priori complexe, réalise uniquement un déphasage et une amplification (ou une atténuation) du signal harmonique, mais ne change aucune de ses autres propriétés

Propriétés d'un SLI

- Un SLI est par définition homogène, linéaire et invariant temporellement
- Il est entièrement déterminé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse en fréquence $H(f)$
- Nous allons voir que les autres propriétés (instantanéité, causalité et stabilité) peuvent s'exprimer naturellement comme des contraintes sur $h(t)$

Système instantané

- Par définition, la sortie $y(t_0)$ d'un système instantané à $t = t_0$ ne dépend que de l'entrée $x(t_0)$ à $t = t_0$
- Comme on a
$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_0 - \tau)x(\tau)d\tau$$
il faut nécessairement que $h(t_0 - \tau)$ soit nulle partout sauf en $\tau = t_0$
- On a donc nécessairement
$$\boxed{h(t) = \alpha\delta(t)}$$
- Dans tous les autres cas, le système est nécessairement dynamique

Causalité

Un SLI est **causal** ssi sa réponse impulsionnelle est nulle pour $t < 0$

$h(t) = 0$ pour $t < 0$

- La fonction $h(t)$ décrit la réponse du système à une impulsion à $t = 0$. Si le système est causal, alors les effets de l'impulsion ne peuvent apparaitre que pour $t \geq 0$, ce qui implique la nullité de la réponse impulsionnelle pour les temps négatifs.
- La même propriété est vraie pour les SLI strictement causaux : dans c'est cas là on doit également avoir $h(0) = 0$

Causalité : démonstration

- Soit $x(t)$ un signal d'entrée nul pour $t < t_0$. A quelle condition le signal de sortie $y(t)$ est-il également nul pour $t < t_0$?
- On a
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
y(t) = 0 \text{ pour } t < t_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(t-\tau) = 0 \text{ pour } \tau > t_0 \\
&= \quad h(t-\tau) = 0 \text{ pour } t-\tau < t - t_0 \\
&= \quad h(t-\tau) = 0 \text{ pour } t-\tau < 0 \\
&= \quad h(u) = 0 \text{ pour } u < 0
\end{aligned}$$

Stabilité

Un SLI est **stable** ssi sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

- La fonction $h(t)$ décrit la réponse du système à une impulsion à $t = 0$. Si le système est stable, alors la réponse impulsionnelle doit rester bornée pour ne pas créer de phénomènes qui explosent

Causalité : démonstration

- Soit $x(t)$ un signal d'entrée borné. A quelle condition le signal de sortie $y(t)$ est-il également borné ?
- On suppose qu'il existe un réel M tel que

$$\forall t, |x(t)| < M$$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

- Il faut donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$ soit définie et bornée

Densités spectrales

- Pour les signaux à énergie finie, nous avons défini la densité spectrale d'énergie (DSE)
$$\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\left\{\gamma_x(\tau)\right\} = |X(f)|^2$$
- Pour les signaux à puissance finie (périodiques ou pas), nous avons défini la densité spectrale de puissance
$$\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\left\{\gamma_x(\tau)\right\}$$
- Une propriété importante est que, si $y(t)$ est le résultat de filtrage de $x(t)$ par un filtre linéaire stable de réponse impulsionnelle $h(t)$ d'énergie finie, on a
$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \, \Gamma_x(f)}$$

Démonstration : signaux à énergie finie

- Pour un signal à énergie finie on a
$$Y(f) = H(f)X(f)$$
- Donc en prenant le module au carré on a
$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2$$
- Et par définition de la densité spectrale d'énergie (DSE), on a donc bien
$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \, \Gamma_x(f)}$$

Démonstration : signaux périodiques

- Pour un signal périodique de période T on a

$$
\begin{aligned}
\gamma_y(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{[T]} y(t)y^*(t-\tau)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{[T]} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(v)x^*(t-\tau-v)dv\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\left[\frac{1}{T}\int_{[T]} x(t-u)x^*(t-(\tau+v))dt\right] dudv \qquad t'=t-u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\left[\frac{1}{T}\int_{[T]} x(t')x^*(t'-(\tau+v-u))dt'\right] dudv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\gamma_x(\tau+v-u)dudv \qquad v'=u-v \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(u-v')du\right]\gamma_x(\tau-v')dv' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_h(v')\gamma_x(\tau-v')dv' \\
&= (\gamma_h * \gamma_x)(\tau)
\end{aligned}
$$

- En prenant la transformée de Fourier, et en utilisant le fait que $h(t)$ est d'énergie finie on a

$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\,\Gamma_x(f)}$$

Démonstration : signaux à puissance finie

- Pour un signal à puissance finie on a

$$
\begin{aligned}
\gamma_y(\tau) &= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} y(t)y^*(t-\tau)dt \\
&= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(v)x^*(t-\tau-v)dv\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\left[\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t-u)x^*(t-(\tau+v))dt\right] dudv \qquad t'=t-u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\left[\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t')x^*(t'-(\tau+v-u))dt'\right] dudv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\gamma_x(\tau+v-u)dudv \qquad v'=u-v \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(u-v')du\right]\gamma_x(\tau-v')dv' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_h(v')\gamma_x(\tau-v')dv' \\
&= (\gamma_h * \gamma_x)(\tau)
\end{aligned}
$$

- En prenant la transformée de Fourier, et en utilisant le fait que $h(t)$ est d'énergie finie on a

$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\,\Gamma_x(f)}$$

Influence du filtrage

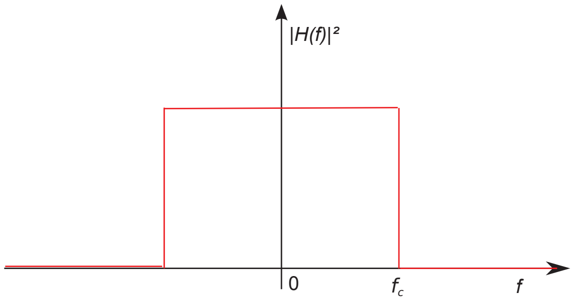
$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\,\Gamma_x(f)}$$

- Le filtrage linéaire modifie la répartition fréquentielle de l'énergie (ou de la puissance selon les cas).
- Les fréquences pour lesquelles
  - $|H(f)|^2 < 1$ seront atténuées, voire supprimées
  - $|H(f)|^2 > 1$ seront conservées, voire amplifiées
- Afin de décrire les filtres linéaires de façon plus normalisées, il est courant de distinguer 4 types de filtres idéaux, qui modélisent 4 types de comportements

Rappels d'ITS

- On rappelle ici les 4 types de filtres idéaux : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande
- Dans la majorité des cas, la réponse impulsionnelle $h(t)$ est réelle donc $H(f)$ possède une symétrie hermitienne : il suffit donc d'observer les fréquences positives
- Les filtres idéaux agissent de façon binaire : soit ils laissent passer totalement les fréquences ($H(f) = 1$), soit ils les suppriment complètement ($H(f) = 0$)
- Pour chacun de ces filtres on définit la bande passante comme l'intervalle des fréquences positives que le filtre laisse passer

Filtre passe-bas idéal



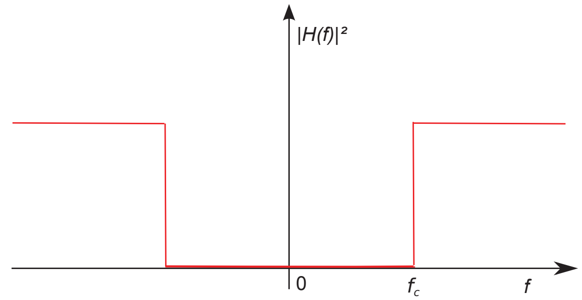
$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [0, f_c]$

Filtre passe-haut idéal



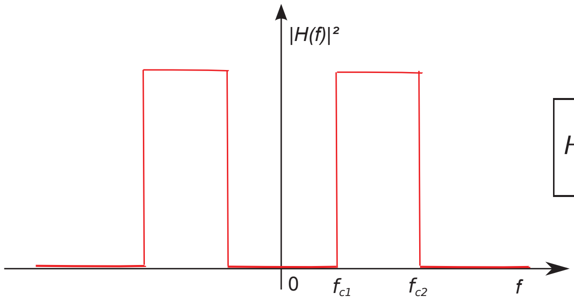
$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| > f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_c, +\infty[$

Filtre passe-bande idéal



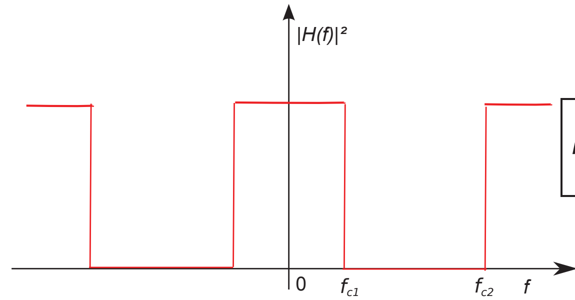
$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_{c1}, f_{c2}]$

Filtre coupe-bande idéal



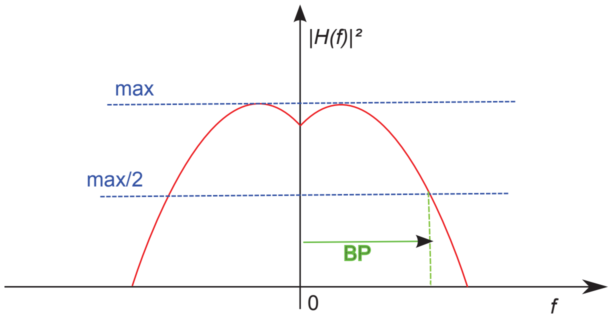
$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

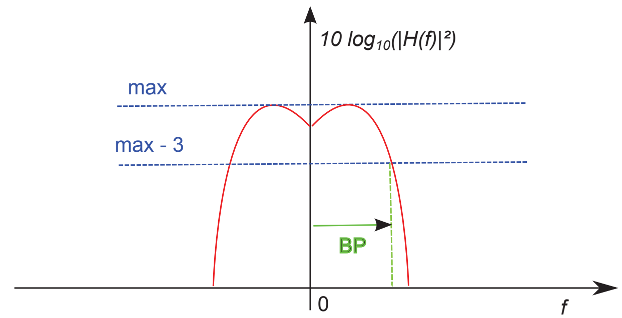
Bande passante $BP = [0, f_{c1}] \cup [f_{c2} + \infty[$

Fréquence de coupure : Gain linéaire



- Détermination de la fréquence de coupure à -3 dB dans le cas du gain linéaire
- On regarde la fréquence pour laquelle le module au carré a été divisé par 2

Fréquence de coupure : Gain en décibels



- Détermination de la fréquence de coupure à -3 dB dans le cas du gain en décibels
- On regarde la fréquence pour laquelle le gain en décibels est descendu de 3 décibels

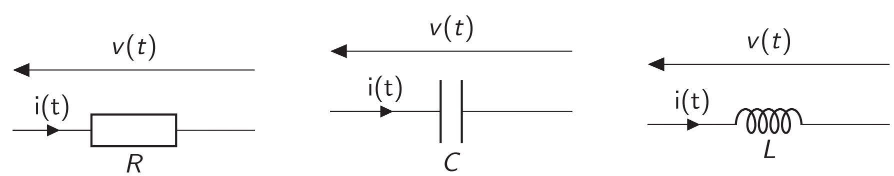
Sommaire

Filtres analogiques

Réalisation pratique des filtres analogiques

En pratique :

- Dans la pratique, tous les filtres analogiques linéaires sont nécessairement causaux et stables
- Les filtres analogiques sont composés de résistances, de condensateurs, de bobines et d'amplificateurs opérationnels. Ces composants, pris dans leur domaine de linéarité, réalisent des dérivations et des intégrations des tensions/intensités électriques



$v(t) = Ri(t)$ $\quad$ $i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$ $\quad$ $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Réalisation pratique des filtres analogiques

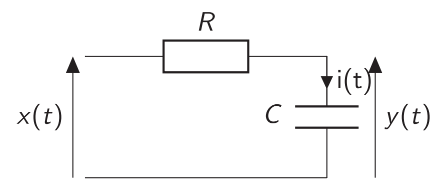
- Ces systèmes réels sont donc décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients réels constants
- Dans la pratique on a donc des entiers $n_a > n_b$ et des coefficients réels $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n_a}$ et $\{b_j\}_{0 \leq j \leq n_b}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n_a} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j x^{(j)}(t)$$

- Dans le domaine fréquentiel cela donne :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_j (j2\pi f)^j}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i (j2\pi f)^i}$$

Exemple du filtre RC



$$\begin{cases} x(t) = Ri(t) + y(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

- La résolution pour un filtre RC donne

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

- Par identification on a donc
  - $n_a = 1$: $a_0 = 1$ et $a_1 = RC$
  - $n_b = 0$: $b_0 = 1$
- Dans le domaine des fréquences, la fonction de transfert est

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

Limites de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier n'est pas la plus adaptée pour étudier de tels systèmes

- La TF réalise une intégration du signal temporel de $-\infty$ à $+\infty$: si l'on considère uniquement des signaux et systèmes causaux, il ne se passe rien entre $-\infty$ et 0 donc l'intégration sur cette durée est inutile
- L'existence de la TF est parfois difficile à prouver, même pour des signaux simples (cf signaux périodiques ou à puissance finie) : on aimerait donc avoir une transformée qui permette de *faire les calculs* en se posant moins de questions
- Si l'on considère des équations de dérivations et d'intégrations, se pose le problème des conditions à l'origine sans lesquelles on ne peut pas résoudre le système. En électronique, télécommunications, mécanique etc.... ces conditions sont souvent définies à $t = 0$ et non pas à $t = -\infty$ comme le fait la TF

Transformée de Laplace

- Soit $x(t)$ un signal causal, on appelle **transformée de Laplace** et on note $X(p)$ la quantité

$$\boxed{X(p) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt}$$

  où $p \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe quelconque
- La zone du plan complexe $\mathbb{C}$ pour laquelle cette quantité est définie est appelée **région de convergence**
- Contrairement à la transformée de Fourier il n'existe pas de formule évidente pour calculer une transformée de Laplace inverse

Liens avec la transformée de Fourier

$$\boxed{X(p) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt} \quad \text{vs} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- Intégration sur $[0, +\infty[$ au lieu de $\mathbb{R}$
- Variable p complexe et pas nécessairement imaginaire pure ($p = j2\pi f$) comme dans la transformée de Fourier
- $X(p)$ est très souvent définie, quitte à considérer des régions de convergence plus restreintes. En effet, on a

$$|x(t)e^{-pt}| = |x(t)|e^{-\operatorname{Re}(p)t}$$

  Donc il arrive souvent que même si $x(t)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, $x(t)e^{-pt}$ l'est tout de même pour des valeurs de $\operatorname{Re}(p)$ strictement positives.
- Pour la transformée de Laplace, on commence souvent par faire les calculs et on détermine ensuite pour quelles valeurs de p elle est définie. Ceci simplifiera largement la tâche pour des systèmes compliqués !

Propriétés de la transformée de Laplace

Par analogie avec la transformée de Fourier, pour des signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ causaux, on a :

Linéarité	$z(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$	$Z(p) = \lambda X(p) + \mu Y(p)$
Translation	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(p) = e^{-pt_0}X(p)$
Modulation	$y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$Y(p) = X(p - j2\pi f_0)$
Produit de convolution	$z(t) = x(t) * y(t)$	$Z(p) = X(p) \times Y(p)$
Dilatation/contraction	$y(t) = x(\alpha t)$	$Y(p) = \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}X\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

Propriétés de la transformée de Laplace

Soit $x(t)$ un signal causal intégrable et dérivable sur $[0, +\infty[$

- **Dérivation** Si l'on note $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ alors

$$\boxed{Y(p) = pX(p)}$$

- **Intégration** Si l'on note $y(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$ alors

$$\boxed{Y(p) = \frac{X(p)}{p}}$$

Démonstration : dérivation

- Soit $x(t)$ un signal causal dérivable et intégrable sur $[0, +\infty[$. On note $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \int_{0^-}^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt \\ &= \left[x(t)e^{-pt}\right]_{0^-}^{+\infty} + p\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt \\ &= -x(0^-) + pX(p) \end{aligned}$$

- On a donc

$$\boxed{Y(p) = pX(p)}$$

Démonstration : intégration

- Soit $x(t)$ un signal causal intégrable sur $[0, +\infty[$. On note $y(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$
- On a $y(0^-) = 0$ et $y'(t) = x(t)$ donc par application de la proprosition précédente on a

$$pY(p) = X(p)$$

- On a donc

$$\boxed{Y(p) = \frac{X(p)}{p}}$$

Quelques transformées de Laplace

Considérons α et ω_0 réels strictement positifs,

$x(t)$	$X(p)$	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
$\cos(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
$\sin(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$

Démonstration en exercice

TL d'un échelon

- Considérons un échelon $u(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{TL}\{u(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

- Notons que l'intégrale ne converge que pour $\text{Re}(p) > 0$

Applications aux systèmes différentiels

- Considérons un filtre analogique défini par l'équation

$$\sum_{i=0}^{n_a} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j x^{(j)}(t)$$

avec $n_a > n_b$

- Si l'on suppose que les signaux d'entrée et de sortie sont causaux, et que toutes les conditions initiales sont nulles, on peut prenre la transformée de Laplace de cette expression et l'on obtient

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{n_a} p^{n_a}}}$$

- A quelle condition ce système sera-t-il stable ?

Décomposition en éléments simples

- La fonction de transfert $H(p)$ peut s'écrire

$$H(p) = K\frac{\prod_{j=1}^{n_b}(p - z_j)}{\prod_{i=1}^{n_a}(p - p_i)}$$

  - Les z_j sont appelés les **zéros** de la fonction de transfert
  - Les p_i sont appelés les **pôles** de la fonction de transfert
- Si l'on suppose que tous les pôles sont uniques, on peut écrire grâce à la décomposition en éléments simples

$$H(p) = K\left(\frac{\alpha_1}{p - p_1} + \cdots + \frac{\alpha_{n_a}}{p - p_{n_a}}\right)$$

Décomposition en éléments simples

- Or, si l'on considère $x_i(t) = e^{p_i t}u(t)$ avec $p_i \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{TL}\left\{x_i(t)\right\} &= \int_0^{+\infty} e^{p_i t}e^{-pt}dt \\
&= \left[\frac{e^{-(p-p_i)t}}{-(p-p_i)}\right]_0^{+\infty} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{p - p_i}\right) \\
&= \frac{1}{p - p_i}
\end{aligned}$$

- Défini uniquement si $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(p_i)$
- On en déduit que

$$\mathcal{TL}\left\{h(t)\right\} = K\sum_{i=1}^{n_a}\alpha_i\mathcal{TL}\left\{x_i(t)\right\}$$

Réponse impulsionnelle

- Par identification on a donc

$$h(t) = K\sum_{i=1}^{n_a}\alpha_i e^{p_i t}u(t)$$

- La condition nécessaire et suffisante pour que cette réponse impulsionnelle soit bornée est que les $e^{p_i t}$ soient bornés
- On a

$$\left|e^{p_i t}\right| = e^{\mathrm{Re}(p_i)t}$$

- L'amplitude est donc bornée si et seulement si $\mathrm{Re}(p_i) < 0$
- Pour que le système soit stable, il faut donc que **tous les pôles aient une partie réelle strictement négative**

Stabilité d'un système

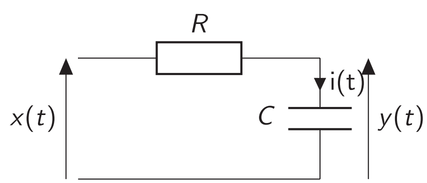
- On considère un système linéaire dont la fonction de transfert $H(p)$ peut s'écrire

$$\boxed{H(p) = K\frac{\prod_{j=1}^{n_b}(p - z_j)}{\prod_{i=1}^{n_a}(p - p_i)}}$$

  avec $n_a > n_b$
- Alors le système est stable si et seulement si

$$\boxed{\forall i, \quad \mathrm{Re}(p_i) < 0}$$

Exemple du filtre RC



$$\begin{cases} x(t) = Ri(t) + y(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

- La résolution pour un filtre RC donne
$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$
- En supposant les conditions initiales nulles on a
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$
- Un seul pôle $p_1 = -\frac{1}{RC}$
- Sa partie réelle est strictement négative donc le filtre est stable

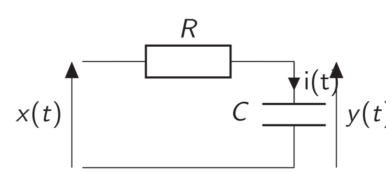
Etude fréquentielle

- Il existe un lien fort entre la transformée de Laplace et la transformée de Fourier
- En particulier, si la région de convergence de la TL inclut la droite imaginaire pure, on peut prendre $p = j2\pi f$ et dans ce cas, si le filtre $h(t)$ est causal on a exactement
$$H(j2\pi f) = \mathcal{TF}\left\{h(t)\right\}$$
- Dans ce cas on peut utiliser la transformée de Laplace pour étudier le comportement en fréquence du filtre
- On remplace p par $j2\pi f$ (où plus souvent $j\omega$ où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation) et on observe le module et la phase

Diagramme de Bode

- Ces quantités sont représentées sur un diagramme, appelé **diagramme de Bode**, qui consiste à représenter
  - Le gain en décibels
$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(|H(j\omega)|^2\right)$$
  - La phase en degrés
$$\Phi = \arg\left(H(j\omega)\right)$$
- L'étude de ces deux quantités en fonction de la pulsation ω (en rad/secondes), permet d'étudier les propriétés du filtre (passe-bas/passe-haut, fréquences de coupure, atténuations, etc...)

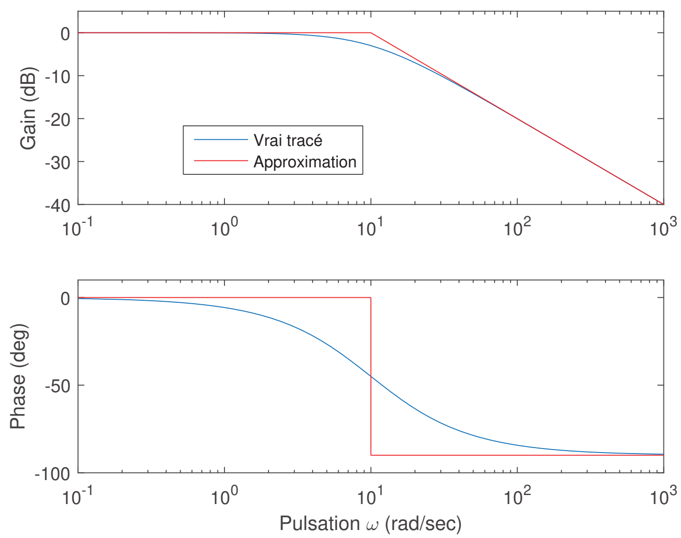
Exemple du filtre RC



$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

- En notant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ on a
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$
- On peut l'étudier très rapidement on considérant deux cas asymptotiques :
  - $\omega << \omega_0$ on a $H(j\omega) \approx 1$ donc $G_{dB} = 0$ et $\Phi = 0°$
  - $\omega >> \omega_0$ on a $H(j\omega) \approx -j\frac{\omega_0}{\omega}$ donc $G_{dB} = -20\log_{10}(\omega) + -20\log_{10}(\omega_0)$ et $\Phi = -90°$
- Gain tend vers $-\infty$ quand $\omega \to +\infty$ donc filtre passe-bas

Exemple du filtre RC



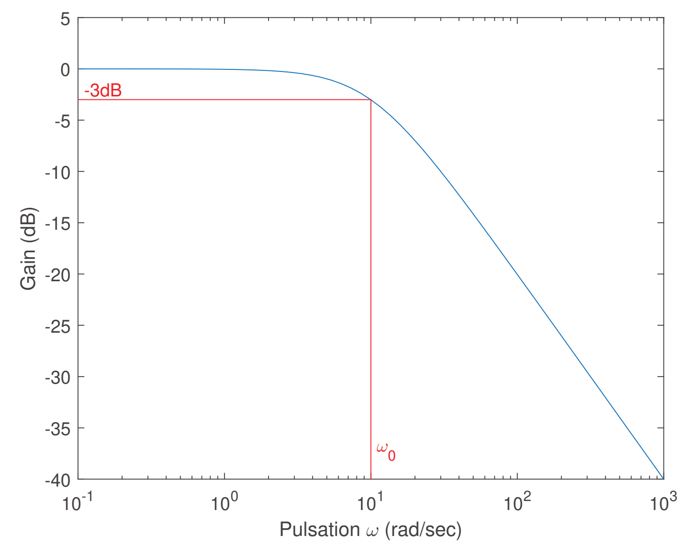
Exemple du filtre RC

- Valeur maximale en $\omega = 0$ et dans ce cas $\max\left(|H(j\omega)|^2\right) = |H(0)|^2 = 1$
- Détermination de la pulsation de coupure à -3 dB

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}\max\left(|H(f)|^2\right) \iff \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{2}$$
$$\iff \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$$
$$\iff \omega = \omega_0$$

- ω_0 est donc la pulsation de coupure à -3 dB du filtre

Exemple du filtre RC



Filtre du premier ordre

- Le filtre causal de fonction de transfert
$$H_{\omega_0}^{LP}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_0}}$$
est un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0$. Son gain G_{dB} en décibels peut être modélisé de façon idéale par
$$G_{dB} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega << \omega_0 \\ -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_0) & \text{pour } \omega >> \omega_0 \end{cases}$$
On l'appelle **passe-bas du premier ordre**
- Le filtre causal de fonction de transfert
$$H_{\omega_0}^{HP}(p) = \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{p}}$$
est un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0$. Son gain G_{dB} en décibels peut être modélisé de façon idéale par
$$G_{dB} = \begin{cases} 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega_0) & \text{pour } \omega << \omega_0 \\ 0 & \text{pour } \omega >> \omega_0 \end{cases}$$
On l'appelle **passe-haut du premier ordre**