Théorie de l'information

Cours 1 - Evénements et probabilités dans un espace probabilisé discret

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année
2017-2018

Sommaire

Sommaire

Expérience aléatoire et épreuve

- Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable, et qui, renouvelée dans des conditions identiques ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement
  - On sait à l'avance l'ensemble des résultats que l'on peut obtenir...
  - ... mais on ne peut pas prévoir à l'avance lequel sera obtenu

Exemples

Lancer de dé, tirage d'une boule dans une urne, tirage du loto, ...

- Une expérience aléatoire peut être une suite d'une ou plusieurs **épreuves** élémentaires

Exemple

Lancer successif de deux dés qui correspond à deux épreuves

Notion d'événement

On considère une expérience aléatoire :

- L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience sera noté Ω. Ω est appelé l'**espace fondamental** ou l'**univers**.
- Un sous-ensemble de Ω est appelé **événement**. Il s'agit d'un ensemble contenant aucun, un ou plusieurs résultats.
- Un événement ne contenant qu'un résultat est appelé un **événement élémentaire**.

Exemple : Lancer de dé à 6 faces

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 6 est un résultat
- *Obtenir un 6* est un événement élémentaire correspondant au résultat 6
- *Obtenir un chiffre pair* est un événement correspondant aux résultats 2, 4 et 6.

Cadre du cours

Dans toute la suite du cours, on supposera que l'espace fondamental Ω est non seulement dénombrable, mais également fini. Ceci signifie :

- Que Ω contient un nombre fini de résultats. On notera ce nombre N, $|\Omega|$ ou $\text{card}(\Omega)$.
- Si on note $\omega_1, \ldots, \omega_N$ les N résultats possibles, on peut donc écrire

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

Union et intersection

Étant donnés deux événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, on peut définir les opérations suivantes :

- **Union** $A \cup B$. Il est réalisé si l'événement A **OU** l'événement B se réalise.
- **Intersection** $A \cap B$. Il est réalisé si l'événement A **ET** l'événement B se réalisent.

Exemple : Lancer de dé à 6 faces

$A = \textit{Obtenir un 6} = \{6\}$
$B = \textit{Obtenir un chiffre pair} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2, 4, 6\}$

- $A \cup B = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \text{B}$
- $A \cap B = \{6\} = \text{A}$

Événements incompatibles, événements contraires

Étant donnés deux événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, on dit qu'ils sont :

- **Incompatibles (ou disjoints)** s'ils n'ont aucun résultat en commun, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$.
- **Contraires** s'ils n'ont aucun résultat en commun, et si l'union des deux événements est toujours réalisée, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$. Dans ce cas, on dit que B est le contraire de A (et que A est le contraire de B) et on écrit $\bar{A} = B$ et $\bar{B} = A$.

Exemple : Lancer de dé à 6 faces

$A = \textit{Obtenir un 6} = \{6\}$
$B = \textit{Obtenir un chiffre impair} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} = \{1, 3, 5\}$

- A et B sont incompatibles
- Le contraire de A, noté $\bar{A}$, est l'événement $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}$

Notion de tribu

Étant donné un espace fondamental fini Ω, on appelle $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous ensembles de Ω, c'est à dire l'ensemble de tous les événements possibles.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \text{ tel que } A \subset \Omega\}$$

On peut démontrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une **tribu**, c'est à dire que :

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \bar{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- Étant donnée une suite d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ est appelée la **tribu des parties** de Ω ou **tribu discrète**

Cadre du cours

Comme dans ce cours, on suppose que l'espace fondamental Ω est fini, on rappelle que :

- Ω contient un nombre fini de résultats, noté N ou $|\Omega|$.
- Si on note $\omega_1, \ldots, \omega_N$ les N résultats possibles, on peut donc écrire

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

Dans ce cas, tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une partie de Ω et peut donc s'écrire comme l'union de zéro, un ou plusieurs événements élémentaires $\{\omega_i\}_{1\le i\le N}$

$$A = \bigcup_{i\in I} \{\omega_i\} \text{ avec } I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$$

Exemple : Lancer de dé à 6 faces

- A = *Obtenir un 6* $= \{6\}$
- B = *Obtenir un chiffre pair* $= \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2, 4, 6\}$
- C = *Obtenir une valeur strictement supérieure à 3* $= \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{4, 5, 6\}$
- Vrai pour les 64 événements possibles

Sommaire

Mesure de probabilité

Étant donné un espace fondamental Ω fini, on définit une **mesure de probabilité** $\mathbb{P}$ comme une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Étant donnés deux événements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

On dit dans ce cas que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Et comme Ω est supposé fini on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé discret**.

Mesure de probabilité : quelques résultats

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et A et B deux événements de $\mathbb{P}(\Omega)$:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Ces résultats seront démontrés en exercice

Mesure de probabilité : quelques résultats

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret. On suppose que Ω peut s'écrire comme l'union de K événements deux à deux incompatibles $A_1, \ldots, A_K$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} A_k$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_k) = 1$
- Pour tout événement A de $\mathbb{P}(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

Ces résultats seront démontrés en exercice

Calcul de probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret. Comme $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ est fini,

- Tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ peut s'écrire comme l'union de zéro, un ou plusieurs événements élémentaires $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq N}$

$$A = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\} \text{ avec } I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$$

- On a donc d'après la définition de la mesure de probabilité (et parce que les ω_i sont incompatibles deux à deux) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

- Dans ce cas, il suffit de connaître $\mathbb{P}(\{\omega_1\}), \ldots, \mathbb{P}(\{\omega_N\})$ pour déterminer intégralement la fonction $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$!

Calcul de probabilités

Exemple : Match de football

On suppose qu'un match a trois résultats possibles :

- $\mathbb{P}(\{\text{victoire équipe 1}\}) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(\{\text{victoire équipe 2}\}) = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(\{\text{match nul}\}) = \frac{1}{4}$

La probabilité qu'une équipe remporte le match est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{victoire}\}) &= \mathbb{P}(\{\text{victoire équipe 1}\} \cup \{\text{victoire équipe 2}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\text{victoire équipe 1}\}) + \mathbb{P}(\{\text{victoire équipe 2}\}) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Équiprobabilité

- Un cas très fréquent est celui où tous les résultats de $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ sont **équiprobables**, c'est à dire que

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\omega_N\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

- Dans ce cas, le calcul de probabilité est un calcul de **dénombrement**. Comme tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une union d'événements élémentaires, il suffit de compter le nombre d'événements élémentaires inclus dans A pour connaître la probabilité de l'événement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Équiprobabilité

Exemple : Lancer de dé à 6 faces, toutes équiprobables

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathbb{P}(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$
- A = *Obtenir un chiffre pair* peut se décomposer comme $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$, union de 3 événements élémentaires, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Événements indépendants

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Exemple : Deux lancers successifs de dé à 6 faces

A = *Obtenir un 6 dans le premier lancer* $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$
B = *Obtenir un chiffre pair dans le premier lancer* $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$
C = *Obtenir un chiffre pair dans le deuxième lancer* $\quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$

- $|\Omega| = 36$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$: non indépendants
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$: indépendants

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** et on note $\mathbb{P}(A|B)$ la quantité :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On pourrait démontrer que $\mathbb{P}(.|B)$ est une mesure de probabilité.

Exemple : Lancer de dé à 6 faces

A = *Obtenir un 6* $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$
B = *Obtenir un chiffre pair* $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$

Probabilité conditionnelle : quelques résultats

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Ce résultat sera démontré en exercice

Probabilité conditionnelle : quelques résultats

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et A un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle. On suppose que Ω peut s'écrire comme l'union de K événements deux à deux incompatibles $A_1, \ldots, A_K$ tels que $\forall k \in [\![1, K]\!], \mathbb{P}(A_k) > 0$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} A_k$$

- **Formule de Bayes** : $\forall i \in [\![1, K]\!], \quad \mathbb{P}(A_i|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k)}$
- **Formule des probabilités totales** : $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k)$

Loi de Bayes

Exemple : Deux urnes remplies de boules

Urne A : une boule rouge, trois boules blanches
Urne B : deux boules rouges, deux boules blanches
On tire une boule au hasard dans une des urne. On a tiré une boule blanche.
Quelle est la probabilité qu'on l'ait tirée dans l'urne A ?

- $\mathbb{P}(rouge|A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(blanche|A) = \frac{3}{4}$
- $\mathbb{P}(rouge|B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(blanche|B) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et A et B incompatibles
- $\mathbb{P}(A|blanche) = \frac{\mathbb{P}(blanche|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(blanche|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(blanche|B)\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{5} = 60\%$