Théorie de l'information

Cours 2 - Variables aléatoires discrètes

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année
2017-2018

Sommaire

Sommaire

Variable aléatoire discrète

- Étant donné un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, on va définir une variable aléatoire discrète X réelle, dont la valeur est fonction du résultat de l'expérience.
- Formellement, une **variable aléatoire discrète** X est une application

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}, \text{ telle que :}$$

  - L'image de Ω par X (que l'on appellera $\mathcal{X}$ dans la suite du cours), est dénombrable (et même finie dans notre cas car Ω est supposé fini). On notera card$(\mathcal{X})$ le nombre d'éléments de $\mathcal{X}$
  - Chaque événement élémentaire ω de Ω est associé à une valeur (et une seule) de la variable aléatoire, qu'on notera $X(\omega)$
  - A l'inverse, pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(J)$ est un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$

Distribution de probabilité

Étant donnés un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X}$:

- On définit une mesure de probabilité P_X sur $\mathbb{R}$ qui est l'image de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ par l'application X :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad P_X(X = x) \triangleq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}) \triangleq \mathbb{P}\left(X^{-1}(x)\right)$$

- La famille $\{P_X(X = x)\}_{x \in \mathcal{X}}$ est appelée la **distribution de probabilité** (ou **loi de probabilité**) de la variable aléatoire X
- $\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(X = x) = 1$
- On note parfois $p_X(x) \triangleq P_X(X = x)$

Variable aléatoire discrète

Exemple : Deux lancers successifs de dé à 6 faces

X variable aléatoire correspondant à la somme des deux dés

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et $\text{card}(\Omega) = 36$
- $\mathcal{X} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $$\begin{aligned} P_X(X = 4) &= \mathbb{P}(\{1 \text{ puis } 3\} \cup \{2 \text{ puis } 2\} \cup \{3 \text{ puis } 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{1 \text{ puis } 3\}) + \mathbb{P}(\{2 \text{ puis } 2\}) + \mathbb{P}(\{3 \text{ puis } 1\}) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$
- Loi de probabilité de X :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Fonction de répartition

Étant donné un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, et une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X}$, on appelle **fonction de répartition** de X et on note F_X l'application :

$$F_X : \mathbb{R} \longmapsto [0, 1], \text{ telle que :}$$

$$F_X(x) = P_X(X \leq x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(] - \infty, x])\right)$$

- $F_X(+\infty) = 1$ et $F_X(-\infty) = 0$
- Si z_1 et z_2 réels tels que $z_1 \leq z_2$, on a $F_X(z_1) \leq F_X(z_2)$

Fonction de répartition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on a :

$$\begin{aligned} P_X(X > a) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(]a, +\infty[)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{X^{-1}(]a, +\infty[)}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X^{-1}(] - \infty, a])\right) \\ &= 1 - F_X(a) \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} P_X(a < X \leq b) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(]a, b])\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{X^{-1}(]a, b])}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X^{-1}(] - \infty, a]) \cup X^{-1}(]b, +\infty])\right) \\ &= 1 - (F_X(a) + 1 - F_X(b)) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Fonction de répartition

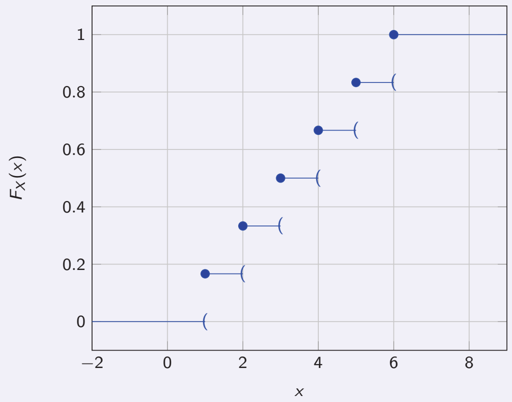
On peut également démontrer les propriétés suivantes pour a et b réels tels que $a < b$:

- $P_X(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P_X(X = a)$
- $P_X(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(X = b)$
- $P_X(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(X = b) + P_X(X = a)$

Fonction de répartition

Exemple : Lancer de dé à 6 faces, toutes équiprobables

X variable aléatoire correspondant à la valeur du dé



Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{X}$. On appelle **espérance** et on note $E[X]$ la quantité :

$$E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, P_X(X = x)$$

Cette quantité correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X

Exemple : Lancer de dé à 6 faces, toutes équiprobables

X variable aléatoire correspondant à la valeur du dé
$E[X] = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{X}$. On appelle **variance** et on note $\mathrm{var}[X]$ la quantité :

$$\mathrm{var}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - E[X])^2 \; P_X(X = x)$$

Cette quantité mesure la déviation moyenne autour de la moyenne espérée. On a :

$$\mathrm{var}[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$$

Exemple : Lancer de dé à 6 faces, toutes équiprobables

X variable aléatoire correspondant à la valeur du dé
$\mathrm{var}[X] = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2.9167$

Loi uniforme discrète

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X}$, suit une **loi uniforme discrète** si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad P_X(X = x) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{X})}$$

- Elle modélise le cas où toutes les valeurs de X sont équiprobables
- Un cas particulier courant est celui où $\mathcal{X} = [\![a, b]\!]$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $a < b$. Dans ce cas on peut démontrer que :

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Loi uniforme discrète

Exemple : Lancer de dé à 6 faces, toutes équiprobables

X variable aléatoire correspondant à la valeur du dé

Cas déjà traité ! Distribution uniforme discrète avec $a = 1$ et $b = 6$.

- $E[X] = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$
- $\text{var}[X] = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12}$

Loi de Bernoulli

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad P_X(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Elle modélise le résultat d'une épreuve (appelée épreuve de Bernoulli) qui n'admet que deux issues. Par exemple, 1 peut correspondre au succès et 0 à l'échec.
- On démontre que :

$$E[X] = p$$

$$\text{var}[X] = p(1-p)$$

Loi de Bernoulli

Quelques exemples :

- Lancer d'une pièce à pile ou face :
  - On définit $X = 1$ si pile et $X = 0$ si face
  - Loi de Bernoulli avec $p = 0.5$
- Tirage d'une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 1 boule bleue
  - On définit $X = 1$ si boule bleue et $X = 0$ si boule rouge
  - Loi de Bernoulli avec $p = 0.25$

Loi binomiale

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$, suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ si et seulement si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_X(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Elle modélise la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
- On démontre que :

$$E[X] = np$$

$$\text{var}[X] = np(1-p)$$

Loi binomiale

Quelques exemples :

- Quatre lancers successifs d'une pièce à pile ou face :
  - On associe 1 à pile et 0 à face. Chaque épreuve : loi de Bernoulli avec $p = 0.5$
  - Variable aléatoire X correspondant au nombre de fois où pile est tiré
  - X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0.5$
- Deux tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 1 boule bleue
  - On associe 1 à la couleur bleue et 0 à la couleur rouge
  - Variable aléatoire X correspondant au nombre de boules bleues tirées
  - X suit une loi binomiale de paramètre $n = 2$ et $p = 0.25$
- Meme chose sans remise : attention, ce n'est plus une loi binomiale !

Loi binomiale

Interprétation avec les mains de la loi binomiale :

- On considère 3 lancers à pile ou face successifs. On note p la probabilité d'avoir un *pile* au cours d'une épreuve unique. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu *pile* exactement deux fois ?
- On commence par énumérer les résultats ayant exactement deux *pile* : PPF, FPP, PFP. Leur nombre correspond au nombre de parties de 2 éléments dans un ensemble de 3 éléments, ce qui est la définition du coefficient binomial $C_3^2 = 3$
- Pour qu'un de ces résultats soient apparus, il faut qu'on ait eu exactement deux fois l'événement *pile* de probabilité p et une fois l'événement *face* de probabilité $1 - p$. La probabilité que cela arrive est $p^2(1-p)$
- En combinant les deux, on en déduit que la probabilité d'avoir deux *pile* est $C_3^2 p^2 (1-p)$

Sommaire

Loi jointe

Étant données deux variables aléatoires discrètes X et Y respectivement à valeurs dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on appelle **loi jointe (ou conjointe)** et on note P_{XY} la loi :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y} \quad P_{XY}(X = x, Y = y) \triangleq \mathbb{P}\left(X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y)\right)$$

- Il s'agit de la probabilité que X vaille x **et** Y vaille y.
- Comme tous les événements $\left\{Y^{-1}(y)\right\}_{y \in \mathcal{Y}}$ sont incompatibles deux à deux et que $\Omega = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} Y^{-1}(y)$, on peut écrire grâce à la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(X = x, Y = y) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathbb{P}\left(X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(x)\right) \\ &= P_X(X = x)\end{aligned}$$

Loi jointe

- De la même façon, on a :

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P_{XY}(X = x, Y = y) = P_Y(Y = y)$$

- La loi P_{XY} est une loi de probabilité, on a donc :

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(X = x, Y = y) = 1$$

- On note parfois $p_{XY}(x, y) \triangleq P_{XY}(X = x, Y = y)$

Loi jointe

On représente en général cette loi sous forme de tableau. Si on pose $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_L\}$

X, Y	$Y = y_1$	$\cdots$	$Y = y_L$	
$X = x_1$	$P_{XY}(X = x_1, Y = y_1)$	$\cdots$	$P_{XY}(X = x_1, Y = y_L)$	$= P_X(X = x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$X = x_M$	$P_{XY}(X = x_M, Y = y_1)$	$\cdots$	$P_{XY}(X = x_M, Y = y_L)$	$= P_X(X = x_M)$
	$\Vert$		$\Vert$	
	$P_Y(Y = y_1)$	$\cdots$	$P_Y(Y = y_L)$	

- La somme de toutes les cases doit faire 1 car c'est une loi de probabilité
- Si on somme le long des lignes, on obtient la loi de X (qu'on appelle également loi marginale du couple (X, Y))
- Si on somme le long des colonnes, on obtient la loi de Y

Loi jointe

Deux lancers à pile ou face

X : nombre de fois où l'on a tiré *pile*
Y : nombre de fois où l'on a tiré *face*

X, Y	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0	0	0.25
$X = 1$	0	0.5	0
$X = 2$	0.25	0	0

Indépendance

Deux variables aléatoires discrètes X et Y respectivement à valeurs dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont **indépendantes** si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y} \quad P_{XY}(X = x, Y = y) = P_X(X = x) P_Y(Y = y)$$

Indépendance

Deux lancers à pile ou face

X : nombre de fois où l'on a tiré *pile*
Y : nombre de fois où l'on a tiré *face*

X, Y	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0	0	0.25
$X = 1$	0	0.5	0
$X = 2$	0.25	0	0

$P_X(X = 0) = 0.25$ et $P_Y(Y = 0) = 0.25$ et pourtant $P_{XY}(X = 0, Y = 0) = 0$!
X et Y ne sont pas indépendantes !

Lois conditionnelles

Soient deux variables aléatoires discrètes X et Y respectivement à valeurs dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et telles que $P_Y(Y = y) \neq 0$. On appelle **loi conditionnelle de X sachant $Y = y$** et on note $P_{X|Y=y}$ la loi :

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad P_{X|Y=y}(X = x | Y = y) = \frac{P_{XY}(X = x, Y = y)}{P_Y(Y = y)}$$

- $P_{X|Y=y}$ est une loi de probabilité et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X|Y=y}(X = x | Y = y) &= \frac{1}{P_Y(Y = y)} \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{XY}(X = x, Y = y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y} \quad P_{X|Y=y}(X = x | Y = y) = P_X(X = x)$$

Lois conditionnelles

On représente en général les différentes lois conditionnelles sous forme de tableau.
Si on pose $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_L\}$

$X \vert Y$	$Y = y_1$	$\cdots$	$Y = y_L$
$X = x_1$	$P_{X\vert Y=y_1}(X = x_1 \vert Y = y_1)$	$\cdots$	$P_{X\vert Y=y_L}(X = x_1 \vert Y = y_L)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X = x_M$	$P_{X\vert Y=y_1}(X = x_M \vert Y = y_1)$	$\cdots$	$P_{X\vert Y=y_L}(X = x_M \vert Y = y_L)$
	$\Vert$		$\Vert$
	1	$\cdots$	1

- Chaque colonne est ici une loi de probabilité et la somme le long des colonnes vaut donc toujours 1
- On note parfois $p_{X|Y}(x|y) \triangleq P_{X|Y=y}(X = x | Y = y)$

Loi conditionnelles

Pièce et urnes

On considère deux urnes :

- Urne A : deux boules blanches, deux boules noires
- Urne B : une boule blanche, 3 boules noires

On commence l'expérience par tirer à pile ou face. Si on fait *pile*, on tire une boule dans l'urne A, si on fait *face* on tire une boule dans l'urne B.

On considère les variables aléatoires suivantes :
X : 1 si pile, 0 si face
Y : nombre de boules blanches tirées

Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant X ?

$Y\|X$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	0.75	0.5
$Y = 1$	0.25	0.5