# Introduction à la théorie de l'information

Formulaire

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année
Laurent Oudre

2017-2018

## 1 Logarithmes en base 2

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_2(x)$ | 0 | 1 | 1.6 | 2 | 2.3 | 2.6 | 2.8 | 3 | 3.2 | 3.3 |

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \qquad \frac{d\log_2(x)}{dx} = \frac{1}{\ln(2)\ x}$$

$$\log_2(2^x) = x \qquad \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_2(x)$$

$$\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y) \quad \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \log_2(x) - \log_2(y)$$

## 2 Evénements et probabilités dans un espace probabilisé discret

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et $A$ et $B$ deux événements de $\mathbb{P}(\Omega)$ :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $A$ et $B$ indépendants $\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$
- Si $\Omega$ peut s'écrire comme l'union de $K$ événements deux à deux incompatibles $A_1, \dots, A_K$ tels que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ et $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} A_k$, alors on a :

$$\forall i \ \ \mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k)} \text{ formule de Bayes}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k) \text{ formule des probabilités totales}$$

# 3 Variables aléatoires discrètes

## Cas d'une seule variable

Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ :

- $P_X(X = x)$ (parfois notée $p_X(x)$) : distribution (ou loi) de probabilité de $X$
- $\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(X = x) = 1$
- $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ : fonction de répartition
- $E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \; P_X(X = x)$ : espérance
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - E[X])^2 \; P_X(X = x)$ : variance

## Cas de deux variables

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes respectivement à valeurs dans $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ :

- $P_{XY}(X = x, Y = y)$ (parfois notée $p_{XY}(x, y)$) : loi jointe (ou conjointe)
- $\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(X = x, Y = y) = 1$
- $\sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(X = x, Y = y) = P_X(X = x)$
- $X$ et $Y$ indépendantes $\iff \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y} \quad P_{XY}(X = x, Y = y) = P_X(X = x) P_Y(Y = y)$
- $P_{X|Y=y}(X = x | Y = y) = \frac{P_{XY}(X=x,Y=y)}{P_Y(Y=y)}$ : loi conditionnelle de $X$ sachant $Y = y$ (parfois notée $p_{X|Y}(x|y)$)
- $\sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X|Y=y}(X = x | Y = y) = 1$

## Loi de probabilités courantes

| Nom | Domaine $\mathcal{X}$ | Loi |
|---|---|---|
| Loi uniforme discrète | $\{x_1, \ldots, x_M\} \subset \mathbb{R}$ | $\forall x \in \mathcal{X}, \quad P_X(X = x) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\mathcal{X})}$ |
| Loi de Bernoulli | $\{0, 1\}$ | $\forall x \in \mathcal{X}, \quad P_X(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}$ |
| Loi binomiale | $\{0, \ldots, n\}$ | $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_X(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |