Introduction à la théorie de l'information

Programme de révisions

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année

2017-2018

Cours 1 : Evénements et probabilités dans un espace probabilisé discret

Compétences exigibles

- Connaître les différents concepts présentés dans le cours (expérience aléatoire, résultats, espace fondamental, événements, tribu discrète, mesure de probabilité, union, intersection, incompatibilité, indépendance...)
- Savoir utiliser le formulaire pour résoudre un exercice

Pour s'entraîner

TD1 : tous les exercices

Cours 2 : Variables aléatoires discrètes

Compétences exigibles

- Connaître les différents concepts présentés dans le cours (variable aléatoire, distribution de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, loi jointe, lois conditionnelles...)
- Savoir utiliser le formulaire pour résoudre un exercice

Pour s'entraîner

TD2 : tous les exercices

Cours 3 : Systèmes de communication

Compétences exigibles

- Savoir définir une source sans mémoire et un canal sans mémoire
- Savoir modéliser un système de communication sous forme de schéma
- Savoir modéliser un système de communication sous forme de distributions de probabilité

Pour s'entraîner

TD3 : tous les exercices

Cours 4 : Information élémentaire et entropie d'une source

A RETENIR : Information élémentaire

Étant donné un événement A ayant une probabilité $\mathbb{P}(A)$, on définit son **information élémentaire** $I(A)$ comme la quantité :

$$I(A) = -\log_2\left(\mathbb{P}(A)\right)$$

Cette quantité est exprimée en bits.

A RETENIR : Entropie d'une source

Étant donnée une source modélisée par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{X}$, on définit **l'entropie de la source** et on note $H(X)$ la quantité :

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log_2\left(p_X(x)\right)$$

Cette quantité est exprimée en bits.

A RETENIR : Propriétés de l'entropie

Étant donnée une source modélisée par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{X}$, on a :

$$0 \leq H(X) \leq \log_2\left(\text{card}(\mathcal{X})\right)$$

L'entropie est maximale si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \qquad p_X(x) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{X})}$$

A RETENIR : Divergence de Kullback-Leibler

Etant données deux variables aléatoires discrètes X et X' à valeurs dans $\mathcal{X}$, dont on notera respectivement $p(x) = P_X(X = x)$ et $q(x) = P_{X'}(X' = x)$ leurs lois de probabilité. On appelle **divergence de Kullback-Leibler** la quantité :

$$D_{KL}(p||q) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log_2\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$$

A RETENIR : Propriétés de la divergence de Kullback-Leibler

- $D_{KL}(p||q) \geq 0$
- $D_{KL}(p||q) = 0 \iff \forall x \in \mathcal{X}, \ \ p(x) = q(x)$

Compétences exigibles

- Connaître la formule, savoir calculer et interpréter l'information élémentaire, l'entropie d'une source et la divergence de Kullback-Leibler
- Connaître les propriétés de l'entropie et de la divergence de Kullback-Leibler : **démonstration hors programme**

Pour s'entraîner

TD4 : tous les exercices **sauf exercice 4**

Cours 5 : Entropies conjointe et conditionnelles, information mutuelle

A RETENIR : Entropie conjointe

Étant données deux variables aléatoires X et Y à valeurs respectivement dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on définit **l'entropie conjointe** des variables aléatoires X et Y et on note $H(X,Y)$ la quantité :

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log_2\left(p_{XY}(x,y)\right)$$

A RETENIR ET A SAVOIR DEMONTRER : Propriétés de l'entropie conjointe

- $H(X,Y) = H(Y,X)$
- $H(X,Y) \geq 0$
- $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$ avec égalité si et seulement si X et Y sont indépendantes
- $H(X,Y) \geq \max\left(H(X), H(Y)\right)$

A RETENIR : Entropie conditionnelle

Étant données deux variables aléatoires X et Y à valeurs respectivement dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on définit **l'entropie conditionnelle** de Y sachant X et on note $H(Y|X)$ la quantité :

$$H(Y|X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log_2\left(p_{Y|X}(y|x)\right)$$

A RETENIR ET A SAVOIR DEMONTRER : Propriétés de l'entropie conditionnelle

- $H(Y|X) \geq 0$
- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$
- $H(X) \geq H(X|Y)$
- $H(X|X) = 0$

A RETENIR : Information mutuelle

Étant données deux variables aléatoires X et Y à valeurs respectivement dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on définit **l'information mutuelle** de X et Y (ou la transinformation) et on note $I(X;Y)$ la quantité :

$$I(X;Y) = \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log_2\left(\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}\right)$$

A RETENIR ET A SAVOIR DEMONTRER : Propriétés de l'information mutuelle

- $I(X;Y) = D_{KL}\left(p_{XY}(x,y)||p_X(x)p_Y(y)\right)$
- $I(X;Y) = I(Y;X)$
- $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
- $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$
- $I(X;X) = H(X)$
- $I(X;Y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si X et Y sont indépendantes

Compétences exigibles

- Connaître la formule, savoir calculer et interpréter l'entropie conjointe, l'entropie conditionnelle et l'information mutuelle
- Connaître et savoir redémontrer les propriétés de l'entropie conjointe, l'entropie conditionnelle et l'information mutuelle

Pour s'entraîner

TD5 : tous les exercices

Cours 6 : Introduction au codage source

A RETENIR : Extension d'une source

Étant donnée une source discrète X à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$, on appelle **extension d'ordre** k ou **extension de degré** k de la source X et on note $X^{[k]}$ la source émettant des paquets de k symboles de la source X.

$$\underbrace{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(k)}}_{k \text{ symboles}} \quad \underbrace{x^{(k+1)}x^{(k+2)}\dots x^{(2k)}}_{k \text{ symboles}} \quad \underbrace{x^{(2k+1)}x^{(2k+2)}\dots x^{(3k)}}_{k \text{ symboles}} \quad \dots$$

A RETENIR : Propriétés de l'extension d'une source

Considérons une source discrète sans mémoire X :

$$H\left(X^{[k]}\right) = k\, H(X)$$

A RETENIR : Propriétés d'un code binaire déchiffrable

- Étant donnée une source discrète sans mémoire, modélisée par une variable aléatoire discrète X à valeurs dans un alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$, et un code déchiffrable binaire (ou instantané) comportant M mots de longueur $\{l_1, \dots, l_M\}$, on appelle **longueur moyenne** du code la quantité :

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{M} p_X(x_i) l_i$$

- Étant donnée une source discrète sans mémoire, modélisée par une variable aléatoire discrète X et un code binaire déchiffrable (ou instantané) de longueur moyenne $\bar{L}$, on a :

$$\bar{L} \geq H(X)$$

- On appelle **rendement** (ou efficacité) d'un code la quantité

$$\nu = \frac{H(X)}{\bar{L}} \qquad \text{On a : } \nu \in [0, 1]$$

- On appelle **redondance** d'un code la quantité

$$\rho = 1 - \nu \qquad \text{On a : } \rho \in [0, 1]$$

A RETENIR : Inégalité de Kraft

Il existe un code binaire instantané contenant M mots de longueurs $\{l_1, \dots, l_M\}$, si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} \leq 1$$

Ce théorème existe dans une version portant sur les codes déchiffrables. On l'appelle dans ce cas l'**inégalité de Mac Millan**.

A RETENIR : Premier théorème de Shannon ou Théorème du codage de source

- Étant donnée une source discrète sans mémoire, modélisée par une variable aléatoire discrète X, il existe un code binaire instantané (ou déchiffrable) de longueur moyenne $\bar{L}$ tel que :

$$H(X) \leq \bar{L} < H(X) + 1$$

- Soit une source discrète sans mémoire, modélisée par une variable aléatoire discrète X. Pour tout entier $k > 0$, il existe un code binaire instantané (ou déchiffrable) de longueur moyenne pour coder un seul symbole $\bar{L}_{sym}$ tel que :

$$H(X) \leq \bar{L}_{sym} < H(X) + \frac{1}{k}$$

Compétences exigibles

- Connaître le principe du codage source
- Connaître les différents types de codes : par bloc, non singuliers, déchiffrables, instantanés
- Connaître la définition et savoir travailler sur l'extension d'une source (codage, entropie, ...)
- Connaître la formule, savoir calculer et interpréter la longueur moyenne, le rendement et la redondance d'un code.
- Connaître les inégalités de Kraft et de Mac Millan et savoir les utiliser : **démonstration hors programme**
- Connaître le premier théorème de Shannon, savoir l'utiliser et l'interpréter : **démonstration hors programme**
- Savoir construire un code de Shannon-Fano
- Savoir construire un code de Huffman

Pour s'entraîner

TD6 : tous les exercices

Cours 7 : Introduction au codage canal

A RETENIR : Capacité d'un canal

Etant donné un canal discret sans mémoire, ayant pour entrée $X \in \mathcal{X}$, et pour sortie $Y \in \mathcal{Y}$, on appelle **capacité du canal** et on note C la quantité :

$$C = \max_{p_X(x)} I(X;Y)$$

Compétences exigibles

- Connaître le principe du codage canal
- Connaître la formule, savoir calculer et interpréter la capacité d'un canal
- (M, n)-code : **hors programme**
- Deuxième théorème de Shannon : **hors programme** (sauf interprétation)

Pour s'entraîner

TD7 : tous les exercices **sauf exercice 3**