Introduction à la théorie de l'information

TD 1 : Evénements et probabilités dans un espace probabilisé discret

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année

2017-2018

Exercice 1 : Jeu de 32 cartes

On considère l'expérience aléatoire correspondant au tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes et les deux événements suivants :

$$A = \text{Tirer une dame}$$

$$B = \text{Tirer une carte ayant la couleur pique}$$

1. Quel est l'espace fondamental Ω à considérer ? Quel est son cardinal ?
2. L'événement A est-il un événement élémentaire ? Même question pour B.
3. Déterminer l'union $A \cup B$
4. Déterminer l'intersection $A \cap B$
5. A et B sont-ils incompatibles ? Donner un exemple de deux événements incompatibles.
6. Déterminer $\bar{A}$ et $\bar{B}$
7. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$

Exercice 2 : Tribu discrète

On considère l'expérience aléatoire correspondant à deux lancers successifs d'une pièce à *pile* ou *face*.

1. Quel est l'espace fondamental Ω à considérer ? Quel est son cardinal ?
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$
3. Vérifier que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu

Exercice 3 : Quelques propriétés à démontrer

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Si A est un événement de $\mathbb{P}(\Omega)$ alors on a :
$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$
3. On suppose que Ω peut s'écrire comme l'union de K événements deux à deux incompatibles $A_1, \ldots, A_K$
$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} A_k$$
Démontrer que :

(a) $\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_k) = 1$

(b) Pour tout événement A de $\mathbb{P}(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

4. Soient A et B deux événements de $\mathbb{P}(\Omega)$:

   (a) En faisant un schéma, remarquer que :

   $$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

   (b) Montrer que ces trois événements sont incompatibles deux à deux

   (c) En utilisant la propriété démontrée à la question 4, montrer que

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

   (d) En déduire que :

   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5. Soient A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Démontrer que :

   (a) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si A et B sont indépendants

   (b) $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

Exercice 4 : Tirage dans une urne

On considère l'expérience aléatoire correspondant à deux tirages avec remise dans une urne contenant une boule rouge et deux boules bleues.

1. Quel est l'espace fondamental Ω à considérer ? Quel est son cardinal ?

2. Les différents résultats sont-il équiprobables ? Calculer la probabilité de chacun des résultats.

3. Déterminer la probabilité d'avoir tiré exactement une boule rouge.

4. On considère les deux événements suivants :

   $$A = \text{Tirer une boule rouge lors du premier tirage}$$

   $$B = \text{Tirer une boule bleue lors du deuxième tirage}$$

   A et B sont-ils indépendants ?

5. Refaire les questions 2, 3 et 4 en supposant cette fois que les tirages sont sans remise

Exercice 5 : Probabilités conditionnelles

On considère deux médicaments A et B contre la migraine. Sur une cohorte de patients, on donne le médicament A à trois patients sur cinq et le médicament B à deux patients sur cinq. Avec le médicament A, 75% des patients sont soulagés, et avec le médicament B, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?

2. Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament A sachant qu'il est soulagé ?