Introduction à la théorie de l'information

TD 2 : Variables aléatoires discrètes

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année

2017-2018

Exercice 1 : Tirage dans une urne

On considère l'expérience aléatoire correspondant à deux tirages avec remise dans une urne contenant une boule rouge et deux boules bleues. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges tirées.

1. Donner l'ensemble $\mathcal{X}$ des valeurs possibles pour la variable aléatoire X
2. Donner la loi de probabilité de X
3. Calculer son espérance $E[X]$ et sa variance $\text{var}[X]$.
4. Mêmes questions pour un tirage sans remise.

Exercice 2 : Transmission par paquets

On considère un paquet de données contenant 16 bits. On suppose que la probabilité d'erreur pour l'envoi d'un bit est de 0.1 et que les erreurs sur les différents bits du paquet sont indépendantes. On appelle Z la variable aléatoire associée au nombre d'erreurs par paquet.

1. Quelle est la loi de probabilité de Z ?
2. Montrer que $\forall k \geq 1, \forall n \geq 1,\ kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
3. Calculer l'espérance $E[Z]$ de Z. En déduire le nombre moyen d'erreurs par paquet. *Aide : On utilisera la question précédente et on tentera de retrouver l'équation de Newton* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$
4. Déterminer la probabilité que le nombre d'erreurs par paquet soit supérieure ou égale à 5. Pour cela on donne ci-dessous les premiers termes de la loi de probabilité de Z :

z	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$p_Z(Z=z)$	0.1853	0.3294	0.2745	0.1423	0.0514	0.0137	0.0028	0.0004	$\cdots$

Exercice 3 : Loi uniforme

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathcal{X} = \{1, \ldots, N\}$ et suivant une loi uniforme discrète.

On rappelle que :

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{(2N+1)(N+1)N}{6}$$

Calculer l'espérance $E[X]$ et la variance $\text{var}[X]$ de X.

Exercice 4 : Loi de probabilité conjointe, lois conditionnelles

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équitable. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de *face* parmi les deux premiers lancers et Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de *pile* parmi les deux derniers lancers.

1. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$ de X et Y
2. Donner les lois de densité de probabilité marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$
3. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ de Y sachant X
4. X et Y sont-elles indépendantes ?