Introduction à la théorie de l'information

TD 3 : Systèmes de communication

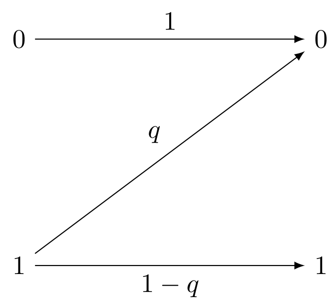
Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année

2017-2018

Dans tous les exercices suivants, on considère uniquement des sources discrètes sans mémoire où les symboles envoyés sont indépendants et identiquement distribués, et des canaux discrets sans mémoire.

Exercice 1 : Canal binaire en Z

On considère le système de communication binaire suivant, où X est la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie. On notera $p = P_X(X = 0)$.



1. Calculer la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ en fonction de q.
2. Calculer la loi conjointe $p_{XY}(x, y)$ de X et Y en fonction de p et q.
3. Calculer la loi marginale $p_Y(y)$ de Y

Exercice 2 : Canal binaire

On considère un système de communication binaire affecté par un bruit additif. On désigne par X la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie du système. On suppose que la probabilité qu'un 0 soit envoyé est de 0.75, que la probabilité de recevoir un 0 alors qu'un 0 a été envoyé est de $\frac{7}{8}$, et que la probabilité de recevoir un 1 alors qu'un 1 a été envoyé est de 0.75.

1. Qu'est-ce qu'un canal binaire ? Quel est l'effet du bruit sur le système ?
2. Faire un schéma pour modéliser le canal.
3. Représenter sous forme de tableaux les distributions de probabilité $p_{Y|X}(y|x)$ et $p_{XY}(x, y)$
4. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 alors qu'un 0 a été envoyé ?
5. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 ? un 0 ?
6. Si l'on reçoit un 1, quelle est la probabilité qu'un 1 ait effectivement été envoyé ?

Exercice 3 : Canal à effacement

On considère un système de communication et on désigne par X la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie du système. On suppose que l'alphabet de source est $\{0,1\}$ mais qu'en sortie il devient $\{0,1,e\}$. On suppose également que les symboles sont soit reçus sans erreur, soit effacés ce qui correspond à une sortie égale à e. On appelle ϵ la probabilité d'effacement d'un symbole et p la probabilité que l'entrée soit égale à 0.

1. Faire un schéma pour modéliser ce canal.
2. Calculer la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ en fonction de ϵ.
3. Calculer la loi conjointe $p_{XY}(x,y)$ de X et Y en fonction de ϵ et p.
4. Quelle est la probabilité de recevoir le message $10e01e$? Quelle est la probabilité de recevoir ce message sachant que le message 100010 a été envoyé ?

Exercice 4 : Pas à pas

Vous êtes le destinataire d'un message binaire composé de 1000 bits. Vous n'avez que les informations suivantes :

- Vous savez que la source qui vous a envoyé le message est sans mémoire, et que le canal utilisé est également sans mémoire.
- Vous savez que vous avez reçu 600 fois le bit 0.
- Vous savez que la source ne vous a envoyé que des 0 et des 1
- On vous a dit que lorsque vous recevez un 1, vous pouvez être sur à 95% que c'est bien un 1 qu'on vous avait envoyé.
- En revanche, lorsque vous recevez un 0, il y a que 4 chances sur 5 qu'on vous ait envoyé un 0

A partir de ces informations, vous devez retrouver les paramètres de la source et les paramètres du canal de communication.

Indices

1. Commencer par mettre en équation le problème. Noter X la variable aléatoire de l'entrée du canal et Y celle de la sortie du canal.
2. Ecrire toutes les données de l'exercice en fonction des probabilités marginales, conjointe ou conditionnelles impliquant X et/ou Y
3. Réfléchir à la formulation mathématique des deux choses qu'on vous demande de trouver.
4. Calculer la loi conjointe de X et Y
5. A partir de là, vous devriez retrouver les paramètres de la source
6. Et grâce à la formule des probabilités conditionnelles, les paramètres du canal de communication