Introduction à la théorie de l'information

TD 5 : Entropies conjointe et conditionnelles, information mutuelle

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - 1ère année

2017-2018

Exercice 1 : Entropies d'un système de communication

On considère un système de communication : X désigne la variable aléatoire associée au symbole à transmettre et Y celle du symbole reçu. La loi conjointe des deux variables aléatoires X et Y est donnée par le tableau suivant:

X \ Y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	???	0
3	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0
4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0

Les questions 1 à 3 ont déjà été traitées dans le TD 4

1. Il manque une valeur dans ce tableau : que vaut-elle ?
2. Déterminer la loi marginale $p_X(x)$ associée à X. Même question concernant Y.
3. Calculer les entropies $H(X)$ et $H(Y)$. Que peut-on dire ?
4. Calculer l'entropie conjointe $H(X,Y)$ associée à X et Y.
5. Calculer les entropies conditionnelles $H(X|Y)$ et $H(Y|X)$.
6. En déduire l'information mutuelle $I(X;Y)$. Montrer que l'on peut obtenir ce résultat de trois façons équivalentes.

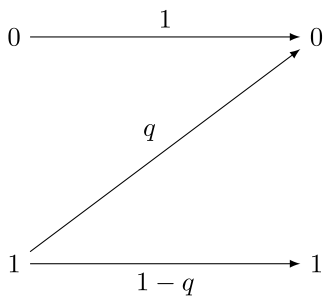
Exercice 2 : Quelques propriétés théoriques

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $I(X;Y) = I(Y;X)$
2. $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
3. $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$
4. $I(X;X) = H(X)$
5. $I(X;Y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si X et Y sont indépendantes

Exercice 3 : Canal binaire en Z

On considère le système de communication binaire suivant, où X est la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie. On notera $p = P_X(X = 0)$.



Les questions 1 et 2 ont déjà été traitées dans le TD 3

1. Calculer la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ en fonction de q.
2. Calculer la loi conjointe $p_{XY}(x, y)$ de X et Y en fonction de p et q.
3. Dans la suite, on appelle h la fonction définie par :

$$\begin{array}{rrcl} h: & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & -z\log_2(z) - (1-z)\log_2(1-z) \end{array}$$

   (a) Calculer en fonction de $h(.)$, p et q l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$
   (b) Calculer en fonction de $h(.)$, p et q l'entropie $H(Y)$
   (c) En déduire une expression de l'information mutuelle $I(X;Y)$ en fonction de $h(.)$, p et q.

Exercice 4 : Pas à pas

On considère les variables aléatoires binaires X et Y, dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

X, Y	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$X = 1$	0	$\frac{1}{3}$

Déterminer les quantités $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ et $I(X;Y)$ et les représenter sous forme d'un diagramme de Venn.

Indices

1. On peut facilement déterminer $H(X, Y)$ vu qu'elle se base justement sur la loi conjointe
2. Ensuite, on calculera les loi marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ pour déterminer $H(X)$ et $H(Y)$
3. On peut directement obtenir à partir de ces 3 quantités l'information mutuelle $I(X;Y)$...
4. ... et donc les entropies conditionnelles.