Introduction à la théorie de l'information

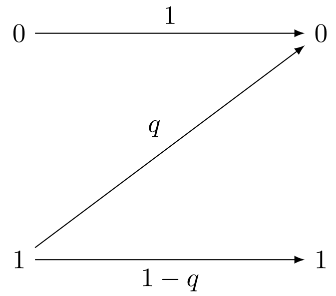
TD 7 : Introduction au codage canal

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Ingénierie et Innovations en Images et Réseaux - $1^{\text{ère}}$ année

2017-2018

Exercice 1 : Canal binaire en Z

On considère le système de communication binaire suivant, où X est la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie. On notera $p = P_X(X = 0)$.



Les questions 1, 2 et 3 ont déjà été traitées dans les TD 3 et TD 5

1. Calculer la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ en fonction de q.
2. Calculer la loi conjointe $p_{XY}(x, y)$ de X et Y en fonction de p et q.
3. Dans la suite, on appelle h la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} h: & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & -z\log_2(z) - (1-z)\log_2(1-z) \end{array}$$

   (a) Calculer en fonction de $h(.)$, p et q l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$
   (b) Calculer en fonction de $h(.)$, p et q l'entropie conditionnelle $H(Y)$
   (c) En déduire une expression de l'information mutuelle $I(X; Y)$ en fonction de $h(.)$, p et q.

4. On suppose que $q = \frac{1}{2}$. Calculer la capacité du canal

Exercice 2 : Canal à effacement

On considère un système de communication et on désigne par X la variable aléatoire associée à l'entrée et Y celle associée à la sortie du système. On suppose que l'alphabet de source est $\{0, 1\}$ mais qu'en sortie il devient $\{0, 1, e\}$. On suppose également que les symboles sont soit reçus sans erreur, soit effacés ce qui correspond à une sortie égale à e. On appelle ϵ la probabilité d'effacement d'un symbole et p la probabilité que l'entrée soit égale à 0.

Les questions 1, 2 et 3 ont déjà été traitées dans le TD 3

1. Faire un schéma pour modéliser ce canal.
2. Calculer la loi de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x)$ en fonction de ϵ.
3. Calculer la loi conjointe $p_{XY}(x, y)$ de X et Y en fonction de ϵ et p.

4. Dans la suite, on appelle h la fonction définie par :

$$\begin{array}{llll} h: & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & -z\log_2(z) - (1-z)\log_2(1-z) \end{array}$$

   (a) Calculer en fonction de $h(.)$, p et ϵ l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$

   (b) Calculer en fonction de $h(.)$, p et ϵ l'entropie conditionnelle $H(Y)$

   (c) En déduire une expression de l'information mutuelle $I(X;Y)$ en fonction de $h(.)$, p et ϵ.

5. Calculer la capacité du canal

Exercice 3 : Code de Hamming

On considère un (M,n)-code $\mathcal{C}$ qui à chaque bloc de 4 bits

b_1	b_2	b_3	b_4

associe le mot-code :

$b_1 \oplus b_2 \oplus b_4$	$b_1 \oplus b_3 \oplus b_4$	b_1	$b_2 \oplus b_3 \oplus b_4$	b_2	b_3	b_4

L'addition $\oplus$ est ici une addition binaire, c'est à dire que $1 \oplus 1 = 0$

1. Calculer le nombre de mots-code M, la longueur du code n et le rendement R

2. Calculer tous les mots-code $\underline{x}$ de ce code $\mathcal{C}$

On considère maintenant la matrice :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que pour tous les mots-code $\underline{x} \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mathbf{H}\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Vérifier sur quelques exemples, que si l'on considère un mot-code $\underline{x} \in \mathcal{C}$ et qu'on l'on ajoute une erreur sur un bit, alors, en faisant le produit $\mathbf{H}\underline{x}$, on retrouve exactement la position du bit erroné écrite en binaire...