Traitement numérique du signal
TD 3 : Filtrage dans le domaine temporel

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 1ère année

2017-2018

1 Filtrage analogique

On considère :

- Un signal d'entrée $x(t)$ défini pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \; \delta(t - kT)$$

avec $T > 0$ et $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$

- Un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ seconde} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de calculer la sortie du filtre $y(t)$ définie par :

$$y(t) = (x * h)(t)$$

1. Tracer $h(t)$. Le support temporel de la réponse impulsionnelle est-il borné ou non ?
2. Donner l'expression de $y(t)$ en fonction de $h(t)$, a_k et T
3. On pose $T = 2$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tracer $x(t)$ et $y(t)$
4. Même question pour $T = 1$ seconde et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. Même question pour $T = 0.5$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Produit de convolution

On considère le signal $x(t)$ défini sur $[0, 1[$ par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ seconde} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer le signal $x(t)$ et établir ses propriétés (continu/discret, support temporel, périodicité, énergie et puissance moyenne)
2. Calculer le produit de convolution

$$y(t) = (x * x)(t)$$

Pour cela, il faudra déterminer avec précaution les intervalles sur lesquels l'intégrale est non nulle, et on pourra séparer les cas $t \leq 1$ et $t > 1$.

3 Filtrage numérique

1. On considère un signal d'entrée
$$x_n = [1\ ,\ 0.5\ ,\ 1\ ,\ -0.5\ ,\ 0\ ,\ 1]$$
et un filtre numérique de réponse impulsionnelle
$$h_n = [2\ ,\ 1]$$
On suppose que x_n et h_n sont nuls pour $n < 0$ et que le premier échantillon présenté est donc $n = 0$.
   (a) Tracer le signal x_n et la réponse impulsionnelle h_n.
   (b) Le filtre est-il un filtre FIR ou IIR ?
   (c) On appelle y_n le signal obtenu à la sortie du filtre. Donner l'expression de y_n en fonction de x_n et h_n. Calculer et tracer le signal y_n.

2. On considère maintenant un filtre numérique causal vérifiant l'équation :
$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Tracer la réponse impulsionnelle h_n du filtre
   (b) Le filtre est-il un filtre FIR ou IIR ?
   (c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m}\ x_m$$
   (d) Montrer que l'on a
$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y_n - y_{n-2} = x_n$$
   (e) Calculer et tracer les 5 premiers termes du signal y_n à la sortie du filtre pour le signal d'entrée x_n défini à la question 1.