Traitement numérique du signal

TD 4 : Etude des signaux dans le domaine fréquentiel

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 1ère année

2017-2018

1 Autour du signal porte

1. Redémontrer que la transformée de Fourier d'un signal porte $y(t)$ centré de durée L s'écrit

$$Y(f) = L\,\mathrm{sinc}\,(Lf)$$

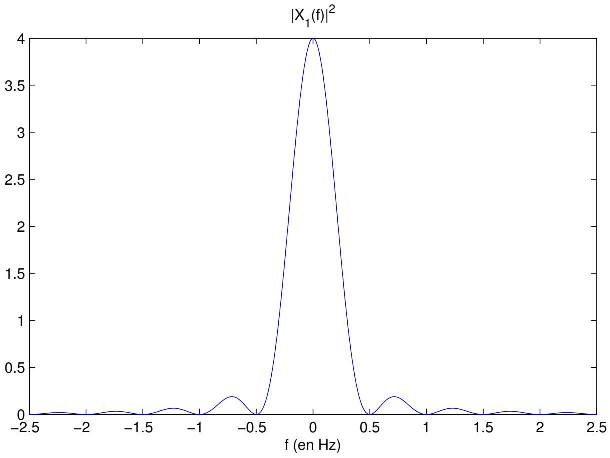
2. On considère les trois signaux suivants (avec $T > 0$) :

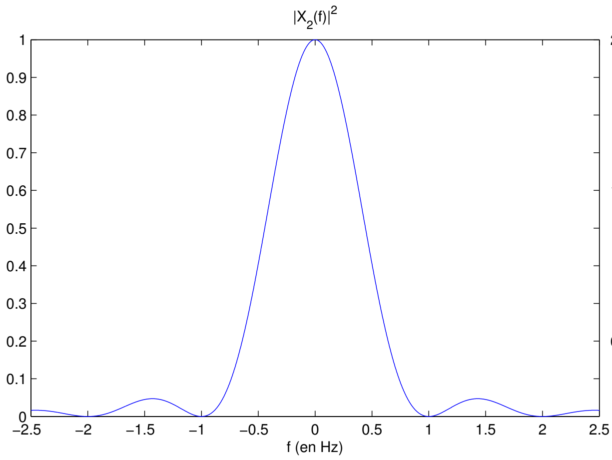
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad x_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

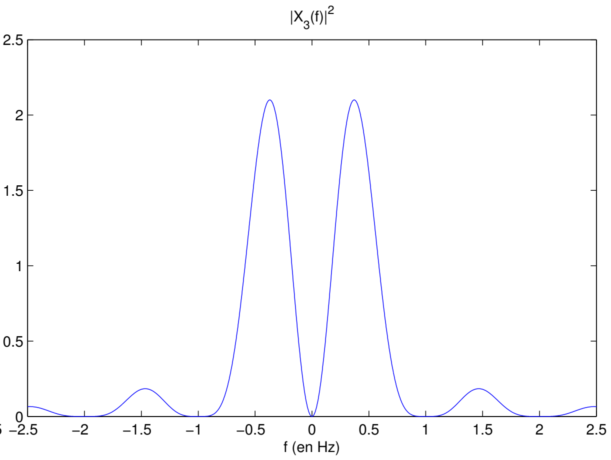
   (a) Tracer ces signaux (avec par exemple $T = 2$ secondes, et établir leurs propriétés (continu/discret, support temporel, périodicité, énergie et puissance moyenne)

   (b) En utilisant le résultat de la question 1 et sans refaire les caluls, calculer leurs transformées de Fourier $X_1(f)$, $X_2(f)$ et $X_3(f)$

   (c) On donne ci-dessous les tracés de $|X_1(f)|^2$, $|X_2(f)|^2$, $|X_3(f)|^2$ pour $T = 2$ secondes. Commenter et calculer la largeur de bande des signaux en fonction de $\frac{1}{T}$.

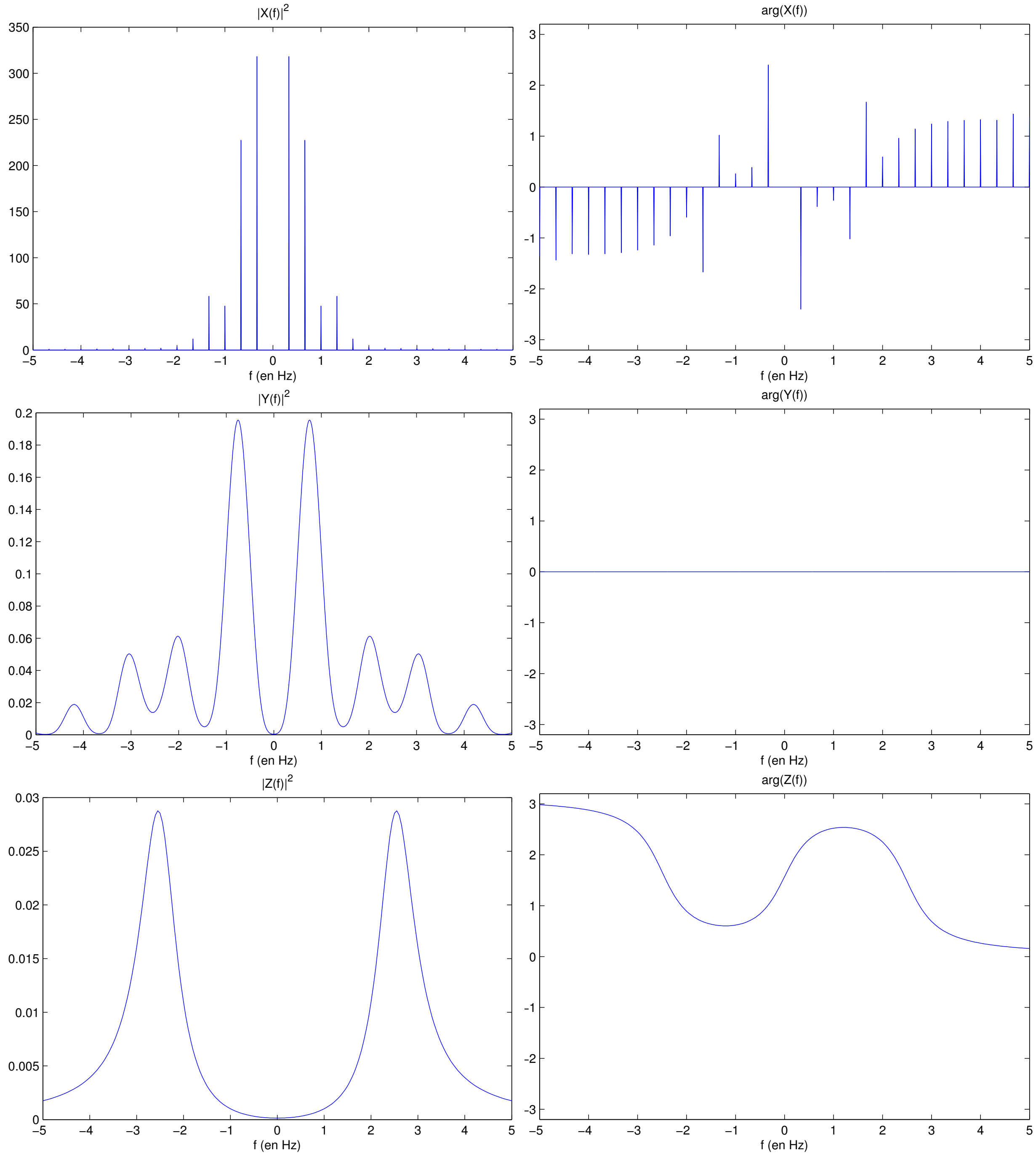






2 Observations de spectres

En observant les modules au carré et les arguments des transformées de Fourier des signaux suivants, déterminer leurs propriétés dans le domaine temporel (réel ou pas ? périodique ? pair ?).



3 Quelques calculs de transformées de Fourier

1. Filtrage adapté
   (a) Montrer que $\mathcal{TF}^{-1}\{X(f) \times Y(f)\} = x(t) * y(t)$
   (b) Montrer que $X^*(f) = \mathcal{TF}\{x^*(-t)\}$
   (c) En déduire que $\mathcal{TF}\{x(t) * x^*(-t)\} = |X(f)|^2$
2. Modulation
   (a) Montrer que $\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
   (b) En déduire une expression de $\mathcal{TF}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$ en fonction de $X(f)$
3. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants et tracer leur spectre :
   (a) $x(t) = \sin^2(10\pi t)$
   (b) $x(t) = 1 + \cos^3(20\pi t) + \sin(30\pi t)$

   On rappelle les formules de trigonométrie suivantes :

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^3(\theta) = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}$$

4 Signaux à durée limitée

On considère un signal $x(t)$ quelconque à support temporel a priori non borné, que l'on observe sur l'intervalle $[t_0 - \frac{\tau}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}]$. On notera $x_\tau(t)$ ce signal à durée limitée τ.

1. Montrer que $x_\tau(t)$ peut être vu comme le produit du signal original $x(t)$ par un signal porte $y(t)$ de durée τ dont on précisera l'expression.
2. Calculer $X_\tau(f)$ en fonction de $X(f)$, t_0 et τ.
3. On considère maintenant le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Calculer $X_\tau(f)$ en fonction de τ, t_0 et f_0.
4. Tracer l'allure de $|X_\tau(f)|^2$ dans le cas où $f_0 \gg \dfrac{1}{\tau}$

5 Transformée de Fourier discrète

On souhaite échantillonner et observer la transformée de Fourier discrète du signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = \cos(882\pi t) + \sin(320\pi t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier continue de ce signal.
2. Tracer son spectre.
3. Quelle est la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_s que l'on peut utiliser ?
4. On choisit $F_s = 1200$ Hz. La condition de Nyquist est-elle respectée ?
5. On choisit de prendre $N = 600$ échantillons. A quelle durée d'observation cela correspond-il ? Quelle sera la résolution en fréquence ? Lister les fréquences observables sur la TFD. Pourra-t-on observer correctement le spectre grâce à la TFD ? Que va-t-il se passer ?
6. Même question pour $N = 2400$ échantillons