Traitement numérique du signal

Cours 3 : Filtrage dans le domaine temporel

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

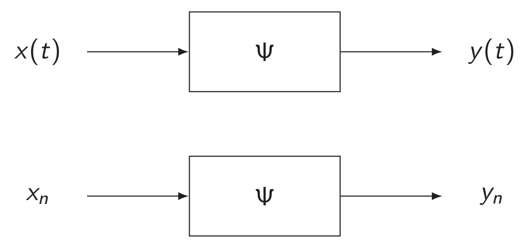
Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 1ère année
2017-2018

Sommaire

Sommaire

Qu'est-ce que le filtrage ?

Qu'est-ce que le filtrage ?



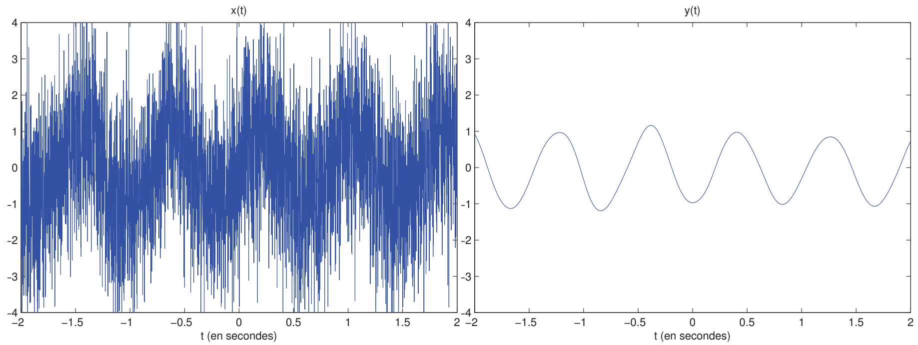
Transformation Ψ d'un signal d'entrée $x(t)$ (ou x_n) en un signal de sortie $y(t)$ (ou y_n)

$$y(t) = \Psi\left(x(t)\right) \qquad y_n = \Psi\left(x_n\right)$$

Utilisation

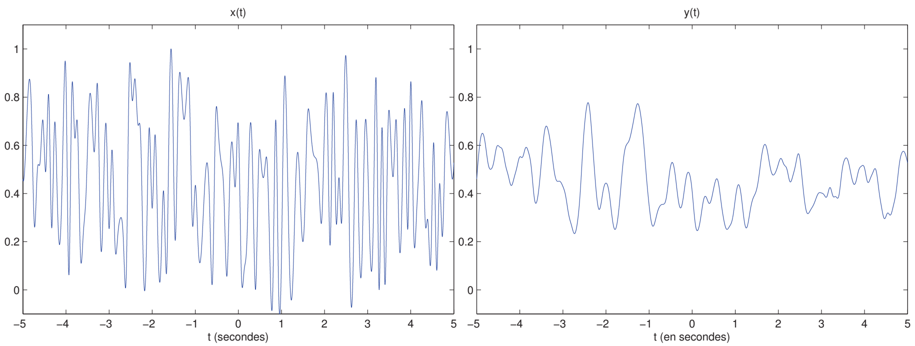
- Les filtres sont présents partout : ordinateurs, téléphones, télévisions, appareils photos, etc...
- Les **filtres analogiques** sont réalisés avec des composants électroniques (résistance, condensateur, inductance, transistor, etc...)
- Les **filtres numériques** sont réalisés par des circuits intégrés, des processeurs programmables (DSP, microcontrôleur), ou du code source sous forme logicielle

Utilité : exemple 1



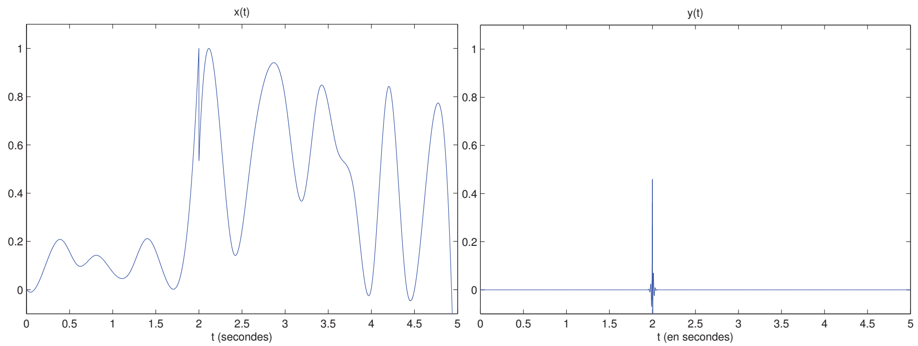
Débruitage : retrouver un signal au milieu du bruit et des perturbations
Autre exemple : retrouver une source parmi plusieurs sources (cf TP)

Utilité : exemple 2



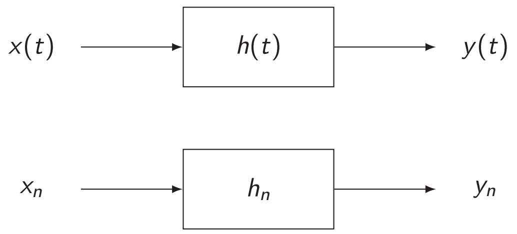
Lissage du signal pour étudier les tendances générales

Utilité : exemple 3



Mettre en évidence un phénomène limité dans le temps (par exemple des temps d'horloges)
Détection d'impulsions dans un signal

Filtre linéaire



Filtrage linéaire : sortie du filtre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau} \qquad \boxed{y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m\, x_{n-m}}$$

$$y(t) = (h * x)(t) \qquad y_n = (h * x)_n$$

$*$: produit de convolution

$\boxed{h(t)(\text{ou } h_n) : \text{réponse impulsionnelle}}$

Produit de convolution

- **Cas continu.**

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, f(\tau) d\tau$$

- **Cas discret.**

$$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m}\, g_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{n-m}\, f_m$$

- Quelques propriétés :
  - Commutativité : $f * g = g * f$
  - Distributivité : $f * (g + h) = f * g + f * h$
  - Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$

Produit de convolution

- Le Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(t) d\tau = x(t)$$

- De la même façon, on a :

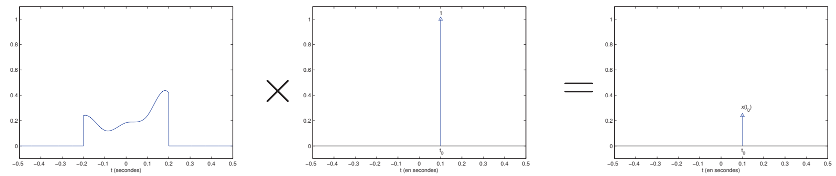
$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(t-t_0) d\tau = x(t-t_0)$$

- Ces propriétés sont aussi valables en discret avec le Dirac discret.

Attention !

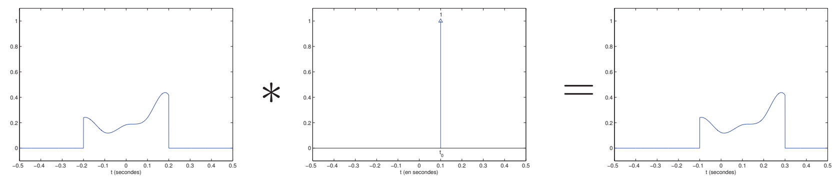
- Produit par un Dirac centré en t_0

$$x(t) \times \delta(t-t_0) = x(t_0)\ \delta(t-t_0)$$



- Produit de convolution par un Dirac centré en t_0

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$



Filtrage linéaire

- Dans le cadre du filtrage linéaire (qui sera le seul type de filtrage étudié dans ce cours), la sortie du filtre correspond au produit de convolution entre l'entrée du filtre et la réponse impulsionnelle
- Cette réponse impulsionnelle $h(t)$ (ou h_n) peut être vue comme un signal continu (ou discret) qui caractérise totalement le filtre et définit son comportement.
- Le support temporel de la réponse impulsionnelle peut être borné ou non borné (fini ou infini).

Réponse impulsionnelle : cas analogique

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Si $x(t) = \delta(t)$, alors

$$y(t) = (h * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

- $h(t)$ correspond donc à la sortie du filtre obtenue lorsqu'on lui met un Dirac en entrée, d'où le nom de **réponse impulsionnelle**
- Meme si un Dirac ne dure que très peu de temps, la réaction du filtre peut produire un signal avec un support temporel de grande taille, voir non borné

Réponse impulsionnelle : cas numérique

$$x_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n$$

Si $x_n = \delta_n$ (version discrète du Dirac, qui vaut 1 si $n = 0$ et 0 sinon), alors

$$y_n = (h * \delta)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{n-m} h_m = h_n$$

- h_n correspond donc à la sortie du filtre obtenue lorsqu'on lui met un Dirac en entrée, d'où le nom de **réponse impulsionnelle**
- Dans le cas où h_n est à support temporel fini, on dit qu'on a affaire à un filtre numérique RIF (Réponse Impulsionnelle Finie). Dans le cas contraire, on parle de filtre RII (Réponse Impulsionnelle Infinie).

Notion de causalité

On dit qu'un filtre est causal si et seulement si :

- **Cas continu**
$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$
- **Cas discret**
$$h_n = 0 \quad \forall n < 0$$
- Ceci exprime le fait que si l'on envoie en entrée un Dirac (où tout se passe pour $t = 0$ ou $n = 0$), la réaction du filtre ne peut survenir qu'instantanément ou après. Dans la pratique, les filtres implémentables sont tous causaux.

Conséquence de la causalité

- Si on considère un filtre analogique causal on a donc :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad y(t) = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau$$

- Pour un filtre numérique causal on a :

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m\, x_{n-m} \quad \rightarrow \quad y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} h_m\, x_{n-m}$$

- Ces formules peuvent permettre de simplifier certains calculs.

Sommaire

Filtrage analogique

Calcul de signaux filtrés

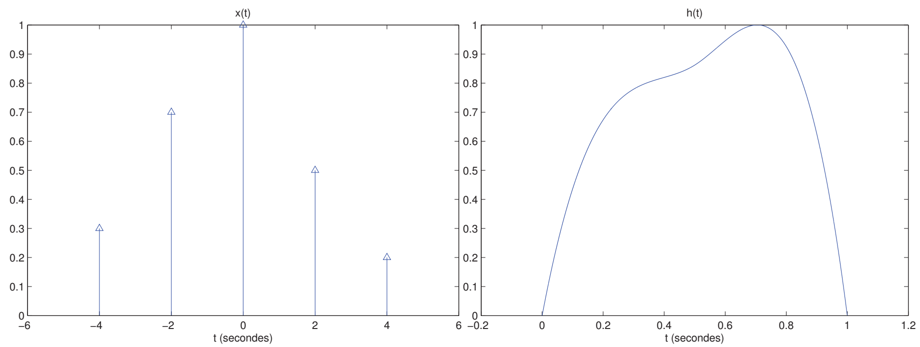
Comment calculer la sortie d'un filtre analogique ?

- Connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ et le signal d'entrée $x(t)$, on calcule le produit de convolution avec la formule la plus pratique :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

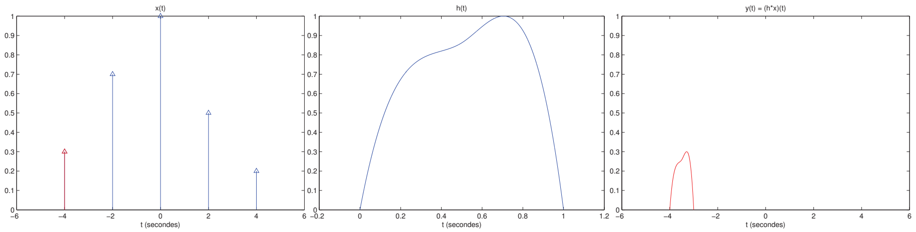
- Parfois, le signal d'entrée et/ou la réponse impulsionnelle possèdent des propriétés qui rendent le calcul plus simple (par exemple si l'on a des Dirac, qui sont l'élément neutre du produit de convolution ou si le filtre est causal)
- Attention aux bornes de l'intégration dans le cas des signaux $x(t)$ à support borné et/ou des réponses impulsionnelles $h(t)$ à support borné.

Exemple 1



- Entrée de la forme $x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$ avec $T = 2$ secondes
- Sortie de la forme $y(t) = (x * h)(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT) * h(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

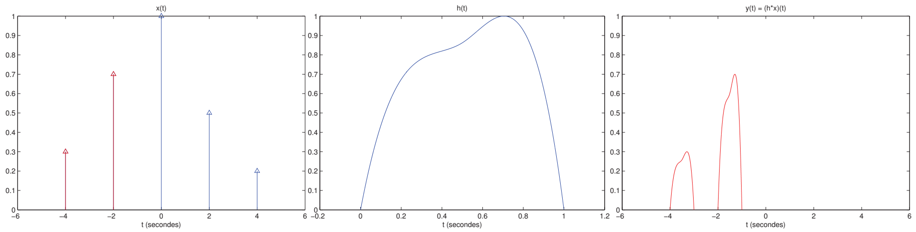
Exemple 1



- Entrée de la forme $x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$
- Sortie de la forme $y(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

$$k = -2$$

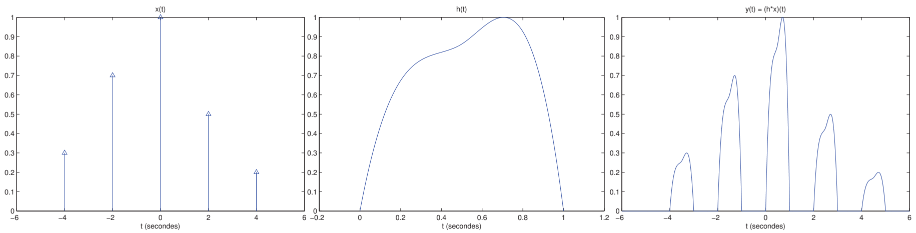
Exemple 1



- Entrée de la forme $x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$
- Sortie de la forme $y(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

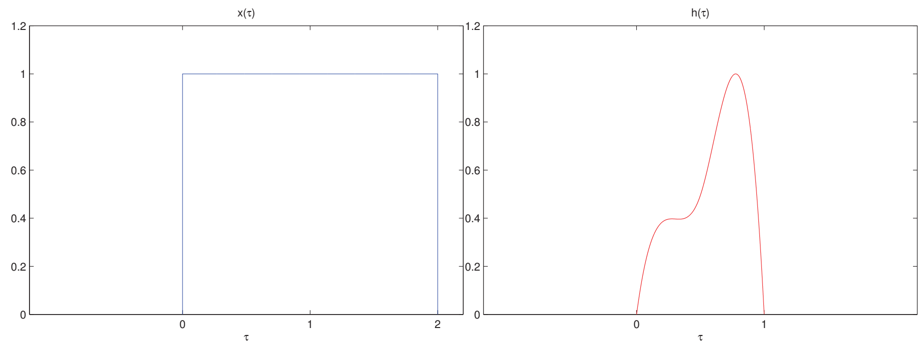
$$k = -1$$

Exemple 1



- Entrée de la forme $x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$
- Sortie de la forme $y(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

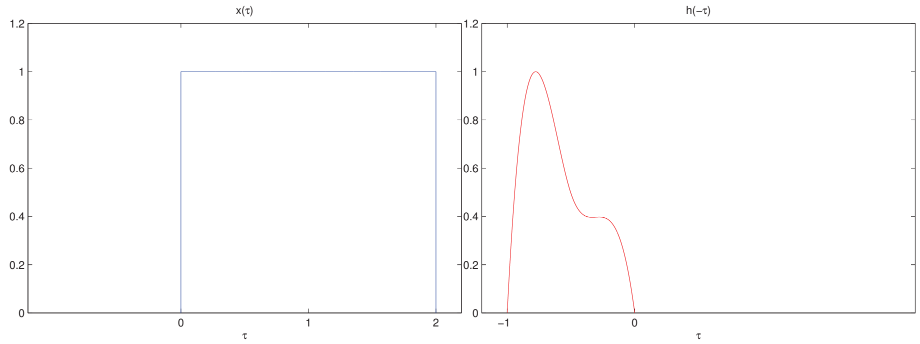
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0, 2]$ et $h(\tau) \in [0, 1]$

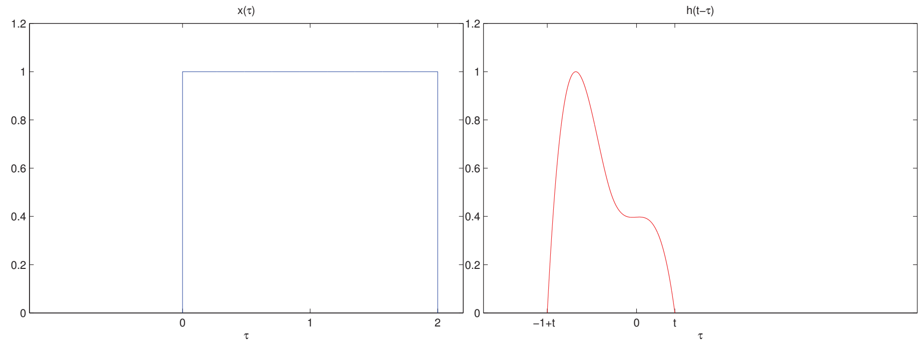
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0,2]$ et $h(-\tau) \in [-1,0]$

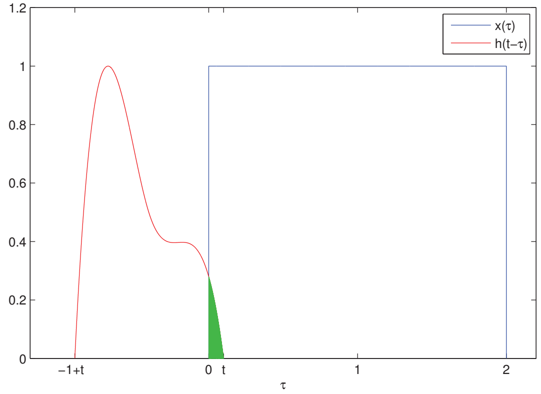
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0,2]$ et $h(t-\tau) \in [-1+t,t]$

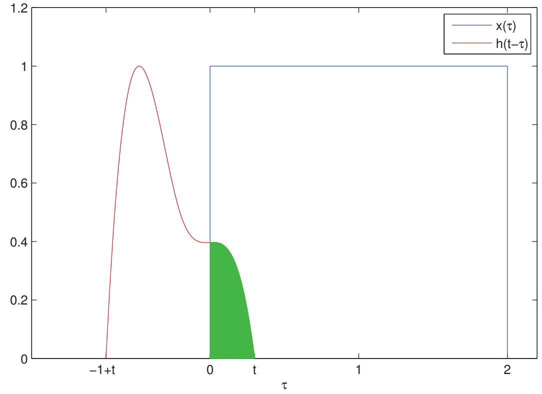
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

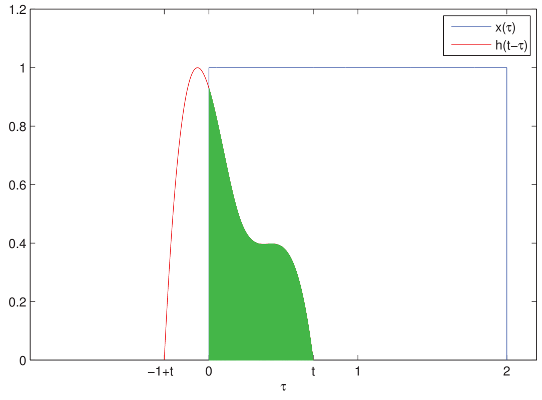
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

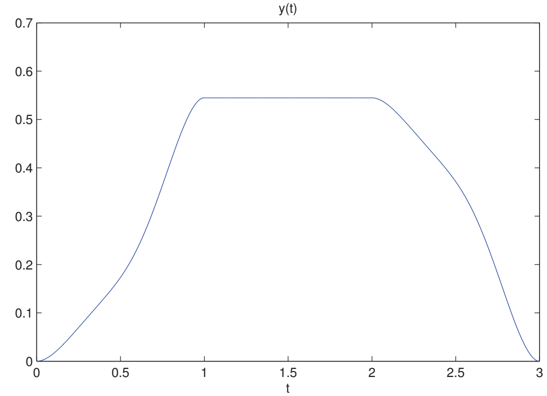
Exemple 2



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

Exemple 2



Remarque : Si le signal d'entrée $x(t)$ a un support temporel borné $[x_{min}, x_{max}]$ et que la réponse impulsionnelle $h(t)$ un support temporel borné $[h_{min}, h_{max}]$, alors le signal de sortie $y(t)$ a un support temporel borné égal à $[x_{min} + h_{min}, x_{max} + h_{max}]$

Sommaire

Filtrage numérique

Rappel : Filtres RIF et RII

Etant donné un filtre numérique **causal** de réponse impulsionnelle h_n il y a deux cas :

- Soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ contient un nombre fini de termes non nuls, dans ce cas on dit que le filtre est à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF en français, FIR en anglais).

$$y_n = \sum_{m=0}^{M} x_{n-m} h_m$$

- Soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ contient un nombre infini de termes non nuls, dans ce cas on dit que le filtre est à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII en français, IIR en anglais).

$$y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{n-m} h_m$$

Calcul de signaux filtrés

Comment calculer la sortie d'un filtre numérique ?

- Souvent, le filtre sera causal donc on pourra utiliser les équations simplifiées du slide précédent.
- Si le filtre est RIF/FIR, il suffit de faire les calculs (multiplications et additions)
- Si le filtre est RII/IIR
  - Soit on se ramène à un calcul de série (compliqué)
  - Soit on trouve une équation de récurrence entre les entrées et les sorties qui permet de simplifier grandement les calculs.

Exemple 1 : RIF/FIR

- On considère le signal numérique suivant défini pour $n \in [\![0, 6]\!]$:

$$x_n = [1 \ , \ 0 \ , \ 0.5 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 1]$$

- Et le filtre numérique de réponse impulsionnelle définie pour $n \in [\![0, 2]\!]$:

$$h_n = [0.1 \ , \ 0.2 \ , \ 0.3]$$

- On suppose que le signal x est nul partout en dehors de son support temporel
- On remarque que :
  - Le filtre est causal car la réponse impulsionnelle h_n est non définie/nulle pour $n < 0$, on va donc pouvoir utiliser l'équation

$$y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{n-m} h_m$$

  - Le support temporel de h_n est fini, il s'agit donc d'un filtre RIF/FIR et on a :

$$y_n = \sum_{m=0}^{2} x_{n-m} h_m$$

Exemple 1 : RIF/FIR

- On a donc une première façon de résoudre le problème :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2}$$

- On peut aussi remarquer, en faisant le changement de variable $n - m \to m$, que :

$$y_n = \sum_{m=0}^{2} x_{n-m} h_m \quad \Longleftrightarrow \quad y_n = \sum_{m=n-2}^{n} h_{n-m} x_m$$

- Cela revient à inverser temporellement h_n, à le faire glisser le long de x_n et à faire le produit scalaire de l'intersection.

Exemple 1 : RIF/FIR

$$y_n = \sum_{m=n-2}^{n} h_{n-m} x_m$$

	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
x_m			1	0	0.5	0	0	0	1	
h_m			0.1	0.2	0.3					

	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
x_m			1	0	0.5	0	0	0	1	
h_{-m}	0.3	0.2	0.1							

Exemple 1 : RIF/FIR

$$n = 0$$

	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
x_m			1	0	0.5	0	0	0	1	
h_{n-m}	0.3	0.2	0.1							

$$y_0 = 0.3 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.1 \times 1 = 0.1$$

Exemple 1 : RIF/FIR

$$n = 1$$

	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
x_m			1	0	0.5	0	0	0	1	
h_{n-m}		0.3	0.2	0.1						

$$y_1 = 0.3 \times 0 + 0.2 \times 1 + 0.1 \times 0 = 0.2$$

Exemple 1 : RIF/FIR

$$n = 2$$

	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
x_m			1	0	0.5	0	0	0	1	
h_{n-m}			0.3	0.2	0.1					

$$y_2 = 0.3 \times 1 + 0.2 \times 0 + 0.1 \times 0.5 = 0.35$$

Résultat final de taille `length(x)+length(h)-1` :

$$y = [0.1\ ,\ 0.2\ ,\ 0.35\ ,\ 0.1\ ,\ 0.15\ ,\ 0\ ,\ 0.1\ ,\ 0.2\ ,\ 0.3]$$

Exemple 2 : RII/IIR

- On considère le signal numérique suivant défini pour $n \in [\![0, 6]\!]$:

$$x_n = [1\ ,\ 0\ ,\ 0.5\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1]$$

- Et le filtre numérique de réponse impulsionnelle définie pour $n \geq 0$:

$$h_n = (-0.5)^n$$

- On suppose que le signal x est nul partout en dehors de son support temporel
- On remarque que :
  - Le filtre est causal car la réponse impulsionnelle h_n est non définie/nulle pour $n < 0$, on va donc pouvoir utiliser l'équation

$$y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{n-m} h_m$$

  - Le support temporel de h_n est infini, il s'agit donc d'un filtre RII/IIR

Exemple 2 : RII/IIR

- En faisant le changement de variable $n - m \to m$, on remarque que :

$$y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{n-m} h_m \iff y_n = \sum_{m=-\infty}^{n} h_{n-m} x_m$$

- Mais comme x_n est nul pour $n < 0$, on a :

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} x_m$$

- On se ramène donc à une somme finie, qui est calculable. Néanmoins pour n élevé, le calcul risque d'etre fastidieux...

Exemple 2 : RII/IIR

- On va chercher une relation de récurrence entre les valeurs y_n pour permettre un calcul plus aisé
- On peut par exemple démontrer que :

$$\begin{aligned} y_n + 0.5 y_{n-1} &= \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} x_m + 0.5 \sum_{m=0}^{n-1} h_{n-1-m} x_m \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-0.5)^{n-m} x_m - (-0.5) \sum_{m=0}^{n-1} (-0.5)^{n-1-m} x_m \\ &= (-0.5)^{n-n} x_n + \sum_{m=0}^{n-1} (-0.5)^{n-m} x_m - \sum_{m=0}^{n-1} (-0.5)^{n-m} x_m \\ &= x_n \end{aligned}$$

Exemple 2 : RII/IIR

On a donc

$$y_n = -0.5 y_{n-1} + x_n$$

- Il suffit de calculer y_0 et on peut ensuite retrouver facilement les autres valeurs en n'utilisant pas seulement les x_n mais aussi les valeurs précédentes de la sortie y_n
- Ici $y_0 = 1$, donc $y_1 = -0.5 \times 1 + 0 = -0.5$, puis $y_2 = -0.5 \times (-0.5) + 0.5 = 0.75$, puis $y_3 = -0.5 \times 0.75 + 0 = -0.375$, etc...
- Attention ici, comme la réponse impulsionnelle est infinie, la sortie du filtre peut comporter une infinité de termes, même si l'entrée est finie !