Traitement numérique du signal

Cours 4 : Étude des signaux dans le domaine fréquentiel

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 1ère année
2017-2018

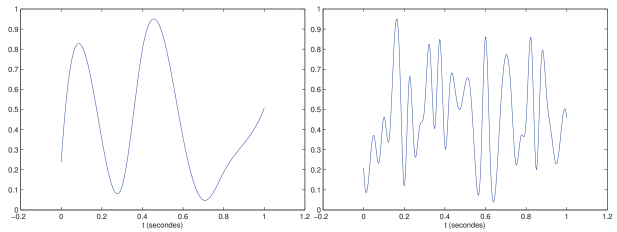
Sommaire

Sommaire

Une intuition de la transformée de Fourier

Bilan de l'étude dans le domaine temporel

- Jusqu'à présent, nous avions uniquement étudié notre signal à partir de son expression analytique, en calculant notamment son énergie totale et la puissance moyenne totale, et en étudiant sa périodicité, son support temporel, etc...
- Pour caractériser un signal, les outils à notre disposition sont donc limités. En particulier, lors de l'étude sur l'échantillonnage, nous avons vu que nous avions besoin de caractériser la lenteur/rapidité d'un signal.



- Cas simple : sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 qui permet de savoir exactement la *rapidité* du signal.

$\rightarrow$ Et si, quelque soit le signal, on pouvait le ramener à des sinusoïdes ?

Intuition de la transformée de Fourier

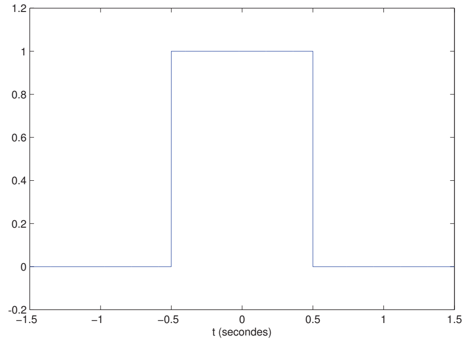
- **Propriété (admise) :** Tout signal $x(t)$ réel, suffisamment régulier et d'énergie finie peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de sinusoïdes d'amplitudes, fréquences fondamentales et phases à l'orgine différentes.

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\sin\left(2\pi f t + \phi(f)\right) df$$

avec $A(f) \in \mathbb{R}$, $\phi(f) \in [0, 2\pi[$.

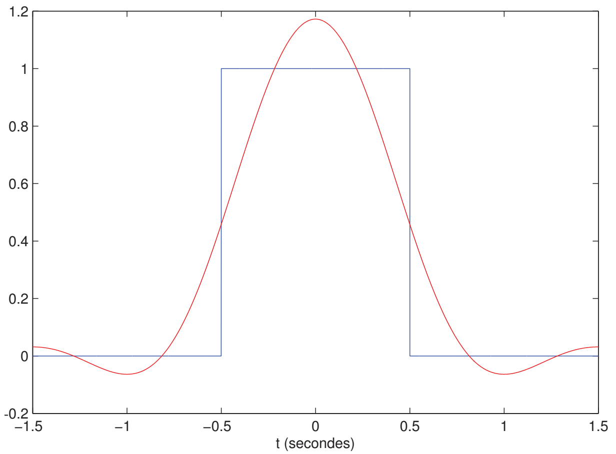
- L'intégrale peut être ici vue comme une somme sur l'ensemble des fréquences comprises entre 0 et $+\infty$

Exemple : Signal porte



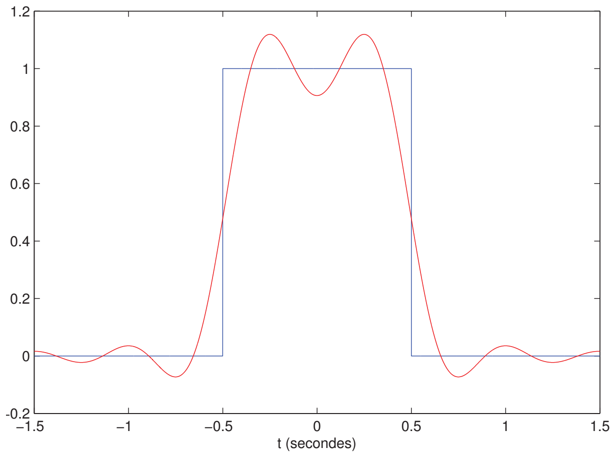
- Signal porte sur $[-0.5, 0.5]$: énergie finie OK
- On va essayer de reconstruire ce signal avec des sinusoïdes de différentes fréquences fondamentales.

Exemple : Signal porte



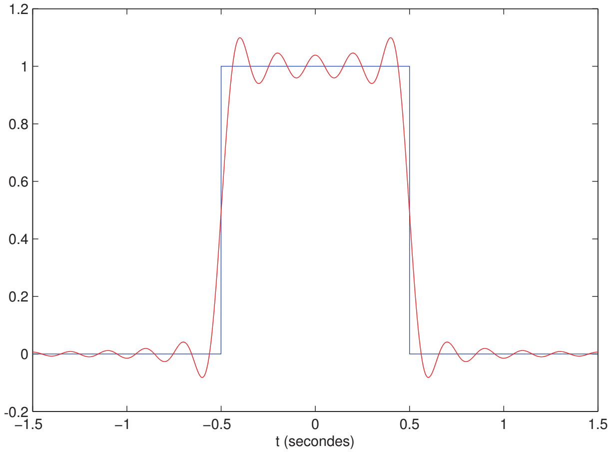
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1]$ Hz

Exemple : Signal porte



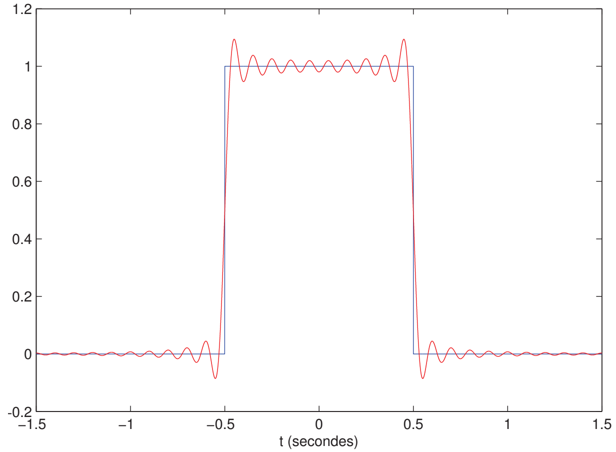
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 3]$ Hz

Exemple : Signal porte



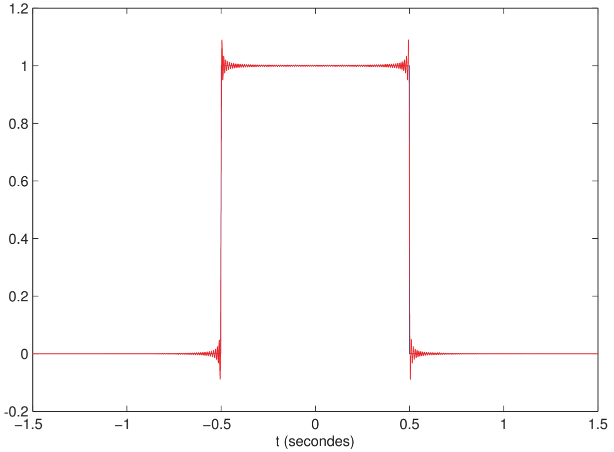
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 5]$ Hz

Exemple : Signal porte



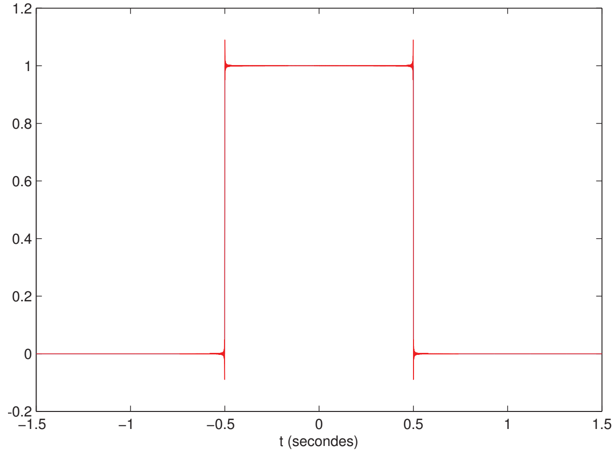
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 10]$ Hz

Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 100]$ Hz

Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1000]$ Hz

Autre écriture

Pour simplifier les calculs, nous allons réécrire cette somme infinie de sinusoïdes

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} A(f)\sin(2\pi ft+\phi(f))\,df &= \int_0^{+\infty} A(f)\cos(2\pi ft+\theta(f))\,df \text{ avec } \theta(f)=\phi(f)-\tfrac{\pi}{2}\\ &= \int_0^{+\infty} A(f)\left[\frac{e^{j2\pi ft+j\theta(f)}+e^{-j2\pi ft-j\theta(f)}}{2}\right]df\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} A(f)e^{j\theta(f)}e^{j2\pi ft}df+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} A(f)e^{-j\theta(f)}e^{-j2\pi ft}df\end{aligned}$$

Si l'on note $B(f)=\frac{A(f)e^{j\theta(f)}}{2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} A(f)\sin(2\pi ft+\phi(f))\,df &= \int_0^{+\infty} B(f)e^{j2\pi ft}df+\int_0^{+\infty} B^*(f)e^{-j2\pi ft}df\\ &= \int_0^{+\infty} B(f)e^{j2\pi ft}df+\int_{-\infty}^{0} B^*(-f)e^{j2\pi ft}df\end{aligned}$$

Avec ce changement de variable, on voit apparaître des fréquences négatives (qui n'ont pas de sens physique mais simplifient le calcul)

Autre écriture

Si l'on note $X(f)=\begin{cases}B(f) & \text{si } f\geq 0\\ B^*(-f) & \text{sinon}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} A(f)\sin(2\pi ft+\phi(f))\,df &= \int_0^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}df+\int_{-\infty}^{0} X(f)\ e^{j2\pi ft}df\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}df\end{aligned}$$

Liens entre les deux expressions :

- On est passé d'une somme sur les fréquences positives à une somme sur toutes les fréquences
- On est passé de deux coefficients réels $A(f)$ et $\phi(f)$ à un seul coefficient $X(f)$ complexe
- On est passé d'une somme de sinusoïdes réelles de fréquences fondamentales f à une somme d'exponentielles complexes de fréquences fondamentales f
- MAIS : notre signal est toujours réel ! Les quantités complexes introduites ici servent juste à simplifier les calculs

Sommaire

Transformée de Fourier continue

Définition

- Étant donné un signal $x(t)$ réel, suffisamment régulier et d'énergie finie, on appelle transformée de Fourier et on note $X(f)$, la fonction vérifiant :

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}df}$$

- Cette fonction se calcule de façon explicite grâce à la formule :

$$\boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}dt}$$

Interprétation : transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f)\right\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df \qquad \textit{transformée de Fourier inverse}$$

- $X(f)$ est une quantité complexe, qui rend compte de la contribution de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans le signal $x(t)$

$$X(f) = \begin{cases} \frac{A(f)e^{j\theta(f)}}{2} & \text{si } f \geq 0 \\ \frac{A(-f)e^{-j\theta(-f)}}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

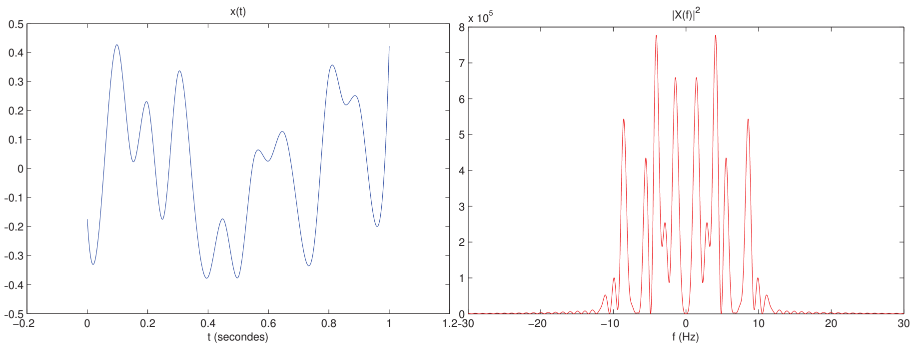
- Le module $|X(f)|$ est lié à l'amplitude de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes. Si cette quantité est élevée, c'est que la sinusoïde de fréquence fondamentale f a une place importante dans la décomposition de $x(t)$.
- L'argument $\arg\left\{X(f)\right\}$ est lié au déphasage de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes.
- Seules les fréquences positives ont un vrai sens physique

Interprétation : transformée de Fourier

$$\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft} dt \qquad \textit{transformée de Fourier}$$

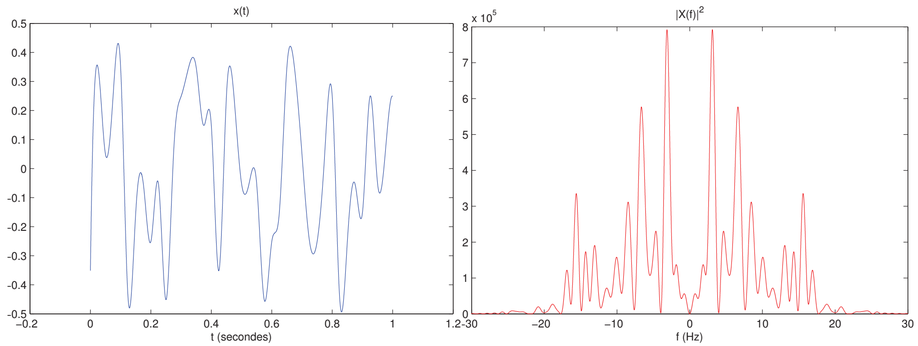
- Pour calculer la transformée de Fourier, il faut pouvoir observer $x(t)$ sur l'ensemble des temps possibles, ce qui n'est souvent pas possible en pratique.
- Même si $x(t)$ est réel, la quantité $X(f)$ est a priori complexe. Pour visualiser cette quantité on représente en général le module au carré $|X(f)|^2$, appelé aussi spectre.
- Nous verrons que la transformée de Fourier peut être définie également pour des signaux $x(t)$ ne vérifiant pas les conditions énoncées précédemment. En particulier, elle s'étend parfaitement aux signaux $x(t)$ complexes et à certains signaux périodiques à puissance finie.

Interprétation d'un spectre



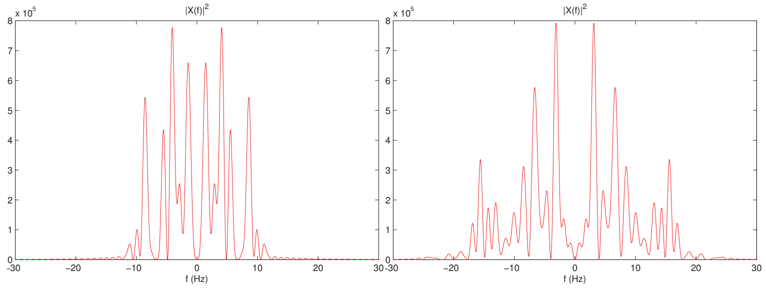
Signal lent : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé dans les basses fréquences
Les sinusoïdes de basses fréquences fondamentales contribuent plus que les autres

Interprétation d'un spectre



Signal plus rapide : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé aussi dans les fréquences plus élevées
Les sinusoïdes de plus hautes fréquences fondamentales contribuent aussi

Notion de largeur de bande



- Si on compare ces deux spectres, on voit que les valeurs élevées sont comprises entre -10 Hz et 10 Hz pour le premier, et entre -20 Hz et 20 Hz pour le second
- De la même façon que l'on avait défini la notion de support temporel, on peut définir ici un support fréquentiel.

Notion de largeur de bande

- On appelle **largeur de bande** d'un signal et on note $B = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un signal occupe.
- Dans notre exemple, on a :

$$B_1 = 0 - 10 \text{ Hz} \qquad B_2 = 0 - 20 \text{ Hz}$$

- Attention, pour déterminer la largeur de bande, il ne faut considérer que les fréquences positives !
- Dans le cas où $f_{min} = 0$ on dit que le signal est en **bande de base**, et on note plus simplement $B = f_{max}$
- Dans notre exemple, on écrirait plus simplement $B_1 = 10$ Hz et $B_2 = 20$ Hz

Propriétés de la transformée de Fourier

- Avant de commencer à calculer des transformées de Fourier, nous allons établir quelques propriétés importantes pour notre étude (et qui vont simplifier grandement nos calculs !)
- Propriétés élémentaires :
  - Linéarité
  - Produit
  - Produit de convolution
  - Translation
  - Modulation

Linéarité de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{\lambda x(t) + \mu y(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda x(t) + \mu y(t)\right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lambda \mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} + \mu \mathcal{TF}\left\{y(t)\right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{\lambda x(t) + \mu y(t)\right\} = \lambda \mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} + \mu \mathcal{TF}\left\{y(t)\right\}}$$

Linéarité de la transformée de Fourier inverse

De la même façon, on pourrait prouver que la transformée de Fourier inverse est aussi linéaire :

$$\boxed{\mathcal{TF}^{-1}\left\{\lambda X(f)+\mu Y(f)\right\}=\lambda\mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f)\right\}+\mu\mathcal{TF}^{-1}\left\{Y(f)\right\}}$$

Produit

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{x(t)y(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f')e^{j2\pi f't}df'\right]y(t)e^{-j2\pi ft}dt && \text{transformée de Fourier inverse} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f')y(t)e^{-j2\pi(f-f')t}df'dt && \text{développement} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f')\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-f')t}dt\right]df' && \text{regroupement des termes dépendant de t} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f')Y(f-f')df' \\
&= (X*Y)(f)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{x(t)y(t)\right\}=\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\}*\mathcal{TF}\left\{y(t)\right\}}$$

Produit de convolution

De la même façon, on pourrait prouver que :

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{x(t)*y(t)\right\}=\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\}\times\mathcal{TF}\left\{y(t)\right\}}$$

- Cette propriété est absolument fondamentale en traitement du signal : nous la retrouverons quand nous aborderons le filtrage dans le domaine fréquentiel.
- Démonstration en TD4

Translation

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{x(t-t_0)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)}dt' && \text{changement de variable } t'=t-t_0 \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'}dt' \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{x(t-t_0)\right\}=e^{-j2\pi ft_0}\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\}}$$

Translation

- D'après la propriété précédente, on voit que :

$$|\mathcal{TF}\{x(t-t_0)\}|^2 = |\mathcal{TF}\{x(t)\}|^2$$

- En translatant un signal temporellement, on ne change pas son spectre (mais uniquement sa phase)
- Cette propriété peut etre utile pour simplifier certains calculs

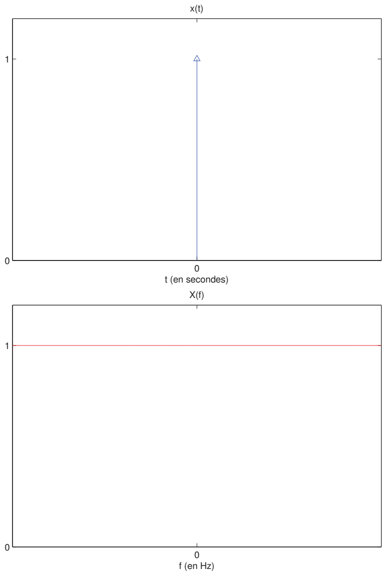
Modulation

De la même façon, on pourrait prouver que :

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}x(t)\right\} = X(f-f_0)}$$

- On appelle **modulation** une telle opération (multiplication par une exponentielle complexe)
- Attention, le signe dans l'exponentielle complexe n'est pas le même que pour la translation !
- Démonstration en TD4

Dirac

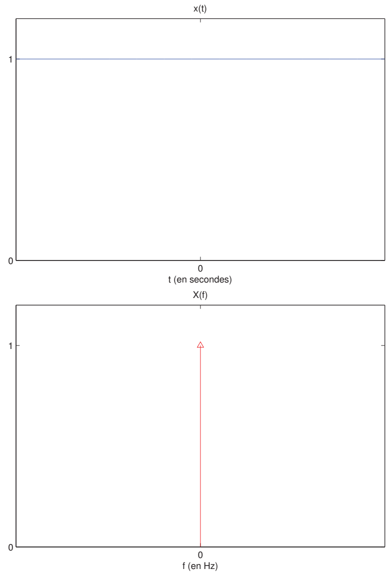


$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f\times 0}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\delta(t)\} = 1}$$

Ce *signal*, très localisé dans le domaine temporel, a une largeur de bande infinie

Constante



$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}^{-1}\{\delta(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)e^{j2\pi ft}df \\
&= e^{j2\pi 0\times t} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{1\} = \delta(f)}$$

Ce signal, ayant un support temporel infini, est très localisé dans le domaine fréquentiel

Dirac translaté - Exponentielle complexe

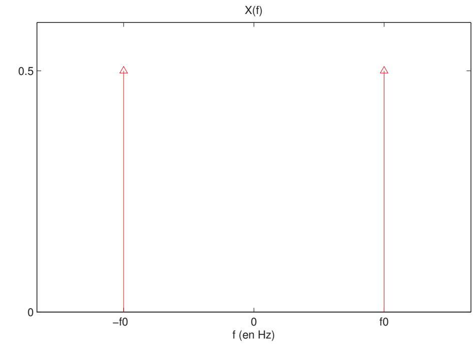
Grâce aux propriétés démontrées dans la partie précédente, on sait que :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\left\{\delta(t-t_0)\right\} &= e^{-j2\pi f t_0}\mathcal{TF}\left\{\delta(t)\right\} \\ &= \boxed{e^{-j2\pi f t_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} &= \mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\times 1\right\} \\ &= \boxed{\delta(f-f_0)} \end{aligned}$$

Au passage on peut remarquer que, même si la fonction $e^{j2\pi f_0 t}$ n'est ni d'énergie finie ni réelle, il est néanmoins possible de définir sa transformée de Fourier.

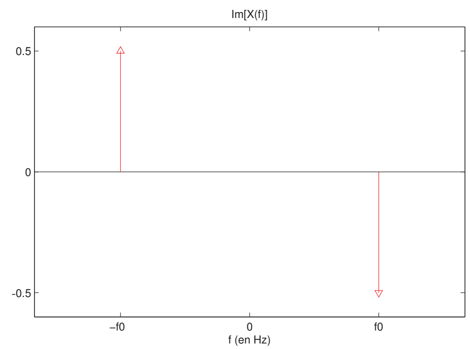
Cosinus



En utilisant la formule d'Euler on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\left\{\cos(2\pi f_0 t)\right\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}+\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\ &= \boxed{\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}} \end{aligned}$$

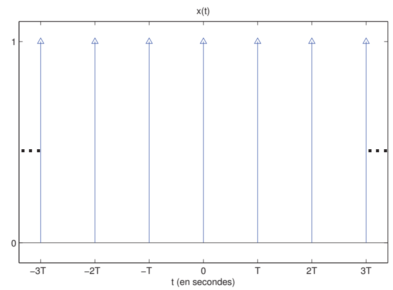
Sinus

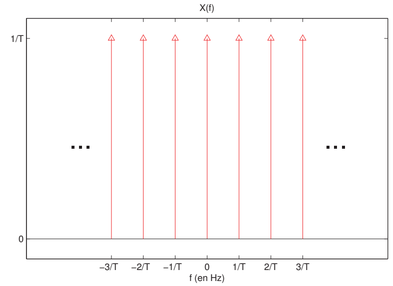


De la même façon, on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction sinus :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\left\{\sin(2\pi f_0 t)\right\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} \\ &= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}-\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\ &= \boxed{\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}} \end{aligned}$$

Peigne de Dirac



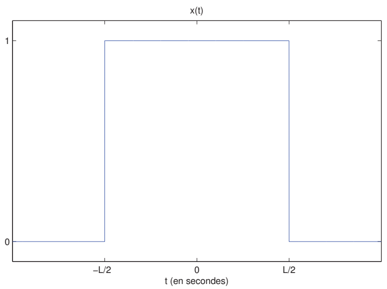


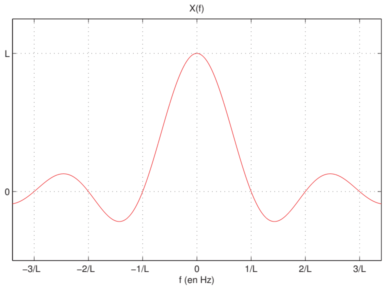
$$\mathcal{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right\}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{Ш_T(t)\right\}=\frac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(f)}$$

- Impossible à démontrer de façon simple : implique la théorie des distributions et les séries de Fourier (hors programme)
- La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est... un peigne de Dirac !
- Plus le peigne de Dirac est espacé dans le domaine temporel (T grand), plus il est resserré dans le domaine fréquentiel

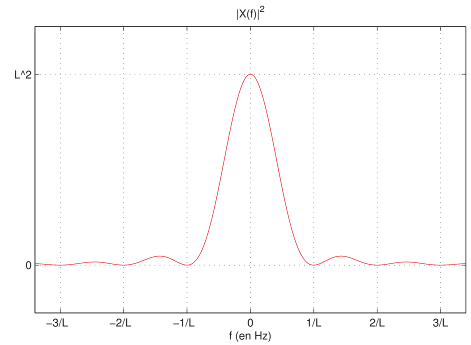
Fonction porte





$$
\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{\Pi_L(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_L(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j\pi f L} - e^{j\pi f L}\right] \\
&= \frac{1}{\pi f} \times \frac{e^{j\pi f L} - e^{-j\pi f L}}{2j} \\
&= \frac{1}{\pi f} \times \sin\left(\pi f L\right) \\
&= L \times \frac{\sin\left(\pi f L\right)}{\pi f L} \\
&= \boxed{L \operatorname{sinc}\left(L f\right)}
\end{aligned}
$$

Fonction porte



- La largeur de bande de la fonction porte est en théorie infinie, mais si l'on trace le module au carré de la transformée de Fourier, on voit que la majorité des intensités se situe dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}\right]$
- En première approximation on peut donc utiliser $B \approx \frac{1}{L}$ (on utilise ici la notation de la bande de base)
- Plus ce signal a un support temporel important (L grand), plus sa largeur de bande est petite (et inversement).

Principe

- Intuitivement, $x(t)$ et $X(f)$ sont juste deux représentations du même signal, il existe donc des liens très forts entre un signal et sa transformée de Fourier. Nous avons en particulier déjà vu que :

Produit dans le domaine temporel	⇔	Produit de convolution dans le domaine fréquentiel

Produit de convolution dans le domaine temporel	⇔	Produit dans le domaine fréquentiel

Translation dans le domaine temporel	⇔	Modulation dans le domaine fréquentiel

Modulation dans le domaine temporel	⇔	Translation dans le domaine fréquentiel

- Nous allons étudier ici deux propriétés (caractère réel et périodicité) dans un des domaines et voir l'influence de cette propriété dans l'autre domaine.

Cas d'un signal réel

Si le signal $x(t)$ est réel, comment cela influence-t-il sa transformée de Fourier ?

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x^*(t) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df\right]^* \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t} df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-f') e^{j2\pi f' t} df'
\end{aligned}
$$

Par unicité de la transformée de Fourier, on a donc :

$$\boxed{x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(f) = X^*(-f)}$$

$$\boxed{x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(-f) = X^*(f)}$$

Cas d'un signal réel

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(-f) = X^*(f)$$

Ceci implique que :

- Le module de la transformée de Fourier d'un signal réel est une fonction paire :
$$|X(-f)| = |X(f)|$$
- L'argument de la transformée de Fourier d'un signal réel est une fonction impaire :
$$\arg\{X(-f)\} = -\arg\{X(f)\}$$

Si le signal est réel, il suffit donc d'observer la transformée de Fourier sur les fréquences positives (qui ont un sens physique). On peut reconstruire ce qui se passe pour les fréquences négatives par symétrie hermitienne (module pair, argument impair).

Cas d'une transformée de Fourier réelle

Supposons maintenant qu'un signal $x(t)$ réel possède une transformée de Fourier $X(f)$ réelle, que peut-on alors dire sur $x(t)$?

$$\begin{aligned} X(f) &= X^*(f) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t')e^{-j2\pi ft'}dt' \end{aligned}$$

Par unicité de la transformée de Fourier inverse, on a donc :

$$\boxed{x(t) \in \mathbb{R} \text{ et } X(f) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(t) = x(-t)}$$

Lien entre caractère réel et parité

Pour résumer, on a donc :

Signal réel	$\Leftrightarrow$	Module de la transformée de Fourier pair et argument de la transformée de Fourier impair

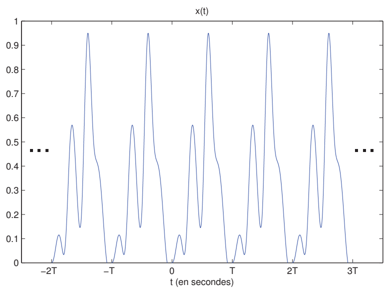
Transformée de Fourier réelle (et signal réel)	$\Leftrightarrow$	Signal pair (et réel)

Cas d'un signal périodique

Si le signal $x(t)$ est périodique, comment cela influence-t-il sa transformée de Fourier ?

- Problème : dans notre définition de la transformée de Fourier, nous n'avons considéré que des signaux à énergie finie. Or nous savons qu'un signal périodique n'est pas à énergie finie, donc nous ne sommes pas surs que la transformée de Fourier existe.
- Nous allons ici considérer un signal $x(t)$ réel, périodique, suffisamment régulier et de puissance finie, et supposer que les conditions sont réunies pour que sa transformée de Fourier existe.

Cas d'un signal périodique



Soit donc $x(t)$ un signal périodique de période T.

- Notons $x_T(t)$ la valeur du signal $x(t)$ sur une période $[0, T[$
- Comme le signal se répète à l'infini, il est entièrement caractérisé par son expression sur une période et on a :

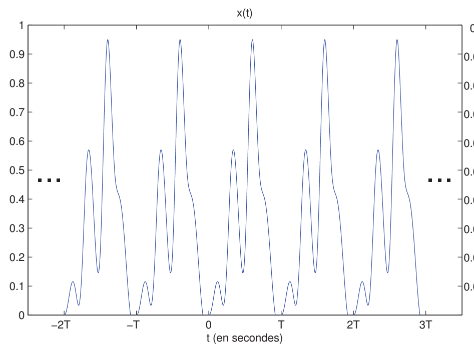
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t-nT) \\ &= x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \end{aligned}$$

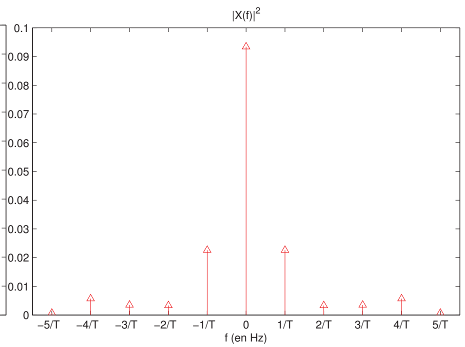
Cas d'un signal périodique

En prenant la transformée de Fourier on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{x(t)\} &= \mathcal{TF}\left\{x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} \\ &= \mathcal{TF}\{x_T(t)\} \times \mathcal{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} \\ &= X_T(f) \times \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T(f)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

Cas d'un signal périodique





$$\mathcal{TF}\{x(t)\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$\boxed{\text{Signal périodique} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Spectre discret}}$$

Cas d'un signal périodique

Rappel :

$$\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \delta(f-f_0) = \delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right)$$

$$\mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2} = \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{T_0}\right)$$

$$\mathcal{TF}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j} = \frac{1}{2j}\delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right) - \frac{1}{2j}\delta\left(f+\frac{1}{T_0}\right)$$

On vérifie bien que pour ces trois signaux périodiques, on a bien un spectre discret, localisé sur les multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Bilan

Signal réel	$\Leftrightarrow$	Module de la transformée de Fourier pair et argument de la transformée de Fourier impair
Transformée de Fourier réelle (et signal réel)	$\Leftrightarrow$	Signal pair (et réel)
Signal périodique	$\Leftrightarrow$	Spectre discret

Théorème de Parceval

- On peut démontrer que, pour un signal à énergie finie, son énergie dans le domaine temporel est la même que celle dans le domaine fréquentiel

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

- L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

Sommaire

Transformée de Fourier discrète

Principe

- Nous avons défini la transformée de Fourier pour un signal analogique $x(t)$
- Peut-on étendre cette définition pour un signal numérique x_n échantillonné (et quantifié) ?
- Nous avons vu que la transformée de Fourier $X(f)$ était une fonction continue de la fréquence f : comment faire pour la calculer et la stocker (par exemple avec MATLAB) pour un signal numérique ?

Critère de Nyquist (rappel)

- Etant donnée une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 que l'on souhaite échantillonner à une fréquence d'échantillonnage F_s, on a vu que :
  - Si $F_s > 2f_0$, on est capable de reconstruire parfaitement la sinusoïde à partir des échantillons
  - Si $F_s = 2f_0$, tous les échantillons sont à 0 et il est impossible de reconstruire la sinusoïde
  - Si $F_s < 2f_0$, une sinusoïde avec une autre fréquence fondamentale semble apparaître après reconstruction : il est impossible de reconstruire la sinusoïde
- Critère de Nyquist : Pour reconstruire parfaitement après échantillonnage une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0, il faut :

$$\boxed{F_s > 2f_0}$$

- Et pour un signal quelconque ?

Critère de Nyquist

- Considérons un signal $x(t)$ de largeur de bande $B = [f_{min}, f_{max}]$: dans quel cas pourra-t-on l'échantillonner sans détruire de l'information ?
- Nous avons vu qu'un signal pouvait être décomposé en une infinité de sinusoïdes
- Pour que le signal $x(t)$ vérifie le critère de Nyquist il faut donc que toutes les sinusoïdes composant le signal vérifient la critère de Nyquist !

$$\forall f \in [f_{min}, f_{max}], \qquad F_s > 2f$$

- Ce qui se résume de la façon suivante :

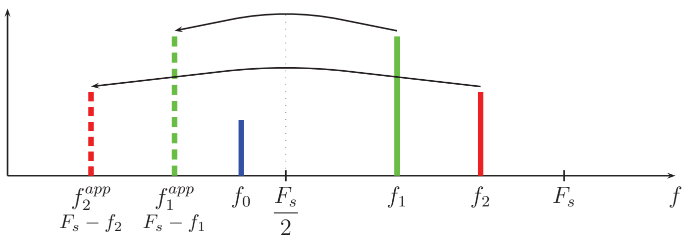
$$\boxed{F_s > 2f_{max}}$$

- Remarques :
  - En bande de base ($f_{min} = 0$), on note $B = f_{max}$ donc le critère de Nyquist s'écrit $F_s > 2B$
  - Si $f_{max} = +\infty$ il est impossible de respecter scrupuleusement le critère de Nyquist

Repliement de spectre

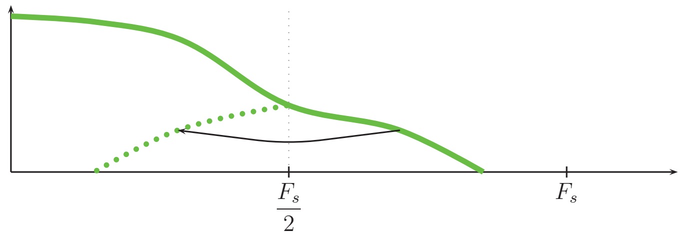
Que se passe-t-il si la condition de Nyquist n'est pas vérifiée ?

- Toutes les composantes du signal de fréquences f au dessus de la fréquence de Nyquist vont faire apparaître des fréquences apparentes dans l'intervalle $\left[0, \frac{F_s}{2}\right]$
- En particulier, les composantes dont la fréquence vérifie $\frac{F_s}{2} < f < F_s$ font apparaître une fréquence apparente $f_{app} = F_s - f$
- On appelle ce phénomène le **repliement de spectre**.



Repliement de spectre

- Pourquoi *repliement* ? Car c'est comme si l'on pliait une feuille de papier :



- On perturbe le contenu fréquentiel avec des fréquences parasites
- Solution : avant l'échantillonnage, si on sait que $f_{max} \geq \frac{F_s}{2}$, on fait un filtrage (filtre anti-repliement) pour enlever les fréquences supérieures à $\frac{F_s}{2}$. Ces fréquences sont définitivement perdues, mais au moins, l'information dans la bande $\left[0, \frac{F_s}{2}\right]$ est préservée.

Signal numérique

- Nous avons déjà vu comment calculer la transformée de Fourier continue pour un signal analogique $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t} dt$$

- Supposons que l'on échantillonne le signal avec une fréquence d'échantillonnage F_s, on a $x_n = x\left(\frac{n}{F_s}\right)$ et cette expression devient :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F_s}\right)\ e^{-j2\pi f \frac{n}{F_s}}$$

- On appelle cette transformée la transformée de Fourier à temps discret (TFTD)
- Problème :
  - En pratique on a accès uniquement à un nombre fini d'échantillons $n = 0 \cdots N-1$
  - Si l'on veut calculer ceci avec MATLAB, on ne pourra pas calculer $X(f)$ pour toutes les fréquences, il va falloir choisir un nombre fini de fréquences pour lesquelles calculer $X(f)$

Transformée de Fourier discrète

- Etant donnés N échantillons $x_0, \cdots, x_{N-1}$, on définit un ensemble de N fréquences f^k et on calcule :

$$X(f^k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-j2\pi f^k \frac{n}{F_s}}$$

- En pratique, on choisit souvent :

$$f^k = k\frac{F_s}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

- La transformée de Fourier discrète s'écrit finalement :

$$\boxed{X_k = X(f^k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1}$$

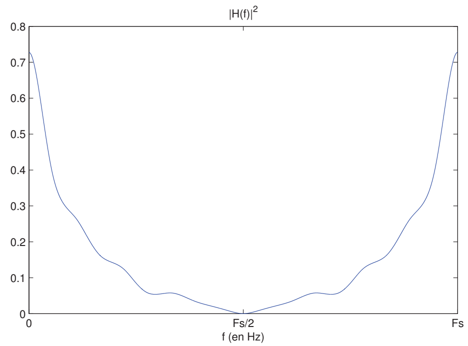
Transformée de Fourier discrète

- Remarque : la transformée de Fourier discrète (TFD) est $N-$périodique :

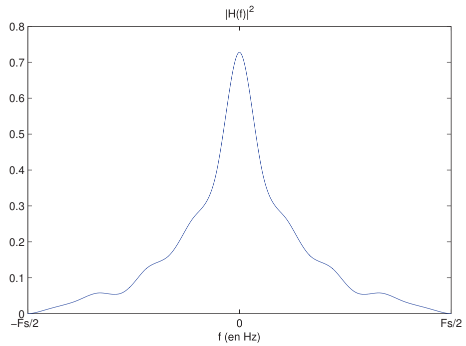
$$\begin{aligned} X_{k+N} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-j2\pi \frac{(k+N)n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-j2\pi \frac{kn}{N} - j2\pi n} \\ &= X_k \end{aligned}$$

- En particulier, les fréquences $f^k = k\frac{F_s}{N}$ avec $k > \frac{N}{2}$ ne vérifient pas la condition de Nyquist, donc ne devraient pas être observables
- En réalité, elles correspondent aux fréquences $f^{k-N} = k\frac{F_s}{N} - F_s$ qui sont comprises entre $-\frac{F_s}{2}$ et 0
- En général, sous MATLAB, on préfère observer le spectre sur $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$ qui a plus de sens physique

Transformée de Fourier discrète : MATLAB



TFD brute



TFD rearrangée

Transformée de Fourier inverse discrète

- On peut également définir une transformée de Fourier inverse discrète

$$\boxed{x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \; e^{j2\pi\frac{kn}{N}}}$$

- Le coefficient $\frac{1}{N}$ permet d'obtenir une reconstruction exacte, il s'agit juste d'une convention. En particulier, certains mettent ce coefficient dans la transformée de Fourier discrète, ou alors $\frac{1}{\sqrt{N}}$ sur les deux transformées.
- La convention présentée ici est celle utilisé sous MATLAB

Résolution en fréquence

- Nous avons vu qu'au lieu d'estimer la transformée de Fourier $X(f)$ pour toutes les fréquences, on n'observait dans le contexte de la transformée de Fourier discrète qu'un ensemble de N fréquences :

$$f^k = k\frac{F_s}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

- L'espace entre deux fréquences observables est appelée *résolution en fréquence* :

$$\boxed{\Delta f = \frac{F_s}{N}}$$

  où F_s est la fréquence d'échantillonnage, et N le nombre d'échantillons du signal qu'on analyse.
- Si on note d la durée (en secondes) du signal qu'on observe, on a $N = d \times F_s$, et on a donc

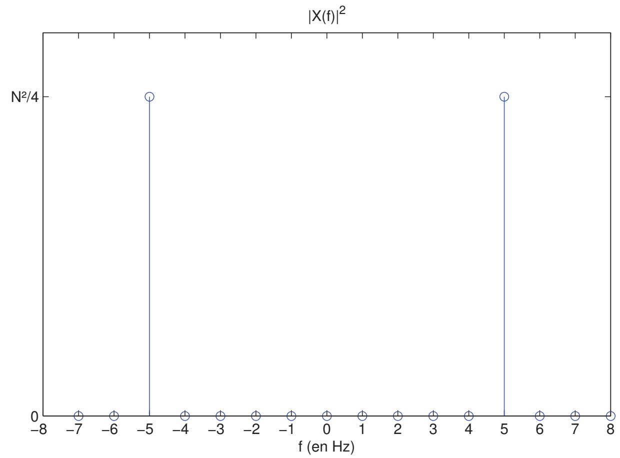
$$\Delta f = \frac{1}{d}$$

- Plus on observe un signal sur une longue durée, plus l'on augmente la précision dans le domaine fréquentiel

Cas d'une sinusoïde

- Supposons qu'on étudie une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 échantillonnée à F_s Hz (avec $f_0 < \frac{F_s}{2}$)
- Deux cas peuvent arriver :
  - Si il existe k' tel que $f_0 = k'\frac{F_s}{N}$ alors la fréquence f_0 est observable dans la TFD, et on a un pic à $f = f_0$ et $f = -f_0$
  - Si ce n'est pas le cas, alors au lieu d'avoir deux pics bien nets, on a des zones elevées autour de $f = f_0$ et $f = -f_0$, mais il est difficile de savoir précisément où se situe la fréquence fondamentale de la sinusoïde.

Cas d'une sinusoïde

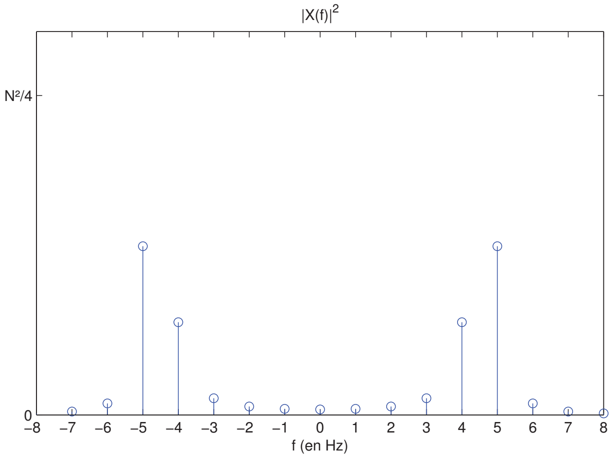


Cas 1 : il existe k' tel que $f_0 = k'\frac{F_s}{N}$

Ici $f_0 = 5$ Hz, $F_s = 100$ Hz, $N = 100$ échantillons, donc $\Delta f = \frac{F_s}{N} = 1$ Hz

En observant la figure, on retrouve directement f_0

Cas d'une sinusoïde

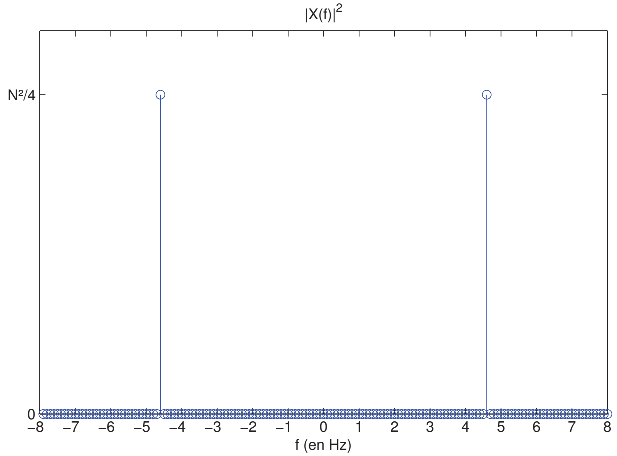


Cas 2 : f_0 quelconque

Ici $f_0 = 4.6$ Hz, $F_s = 100$ Hz, $N = 100$ échantillons, donc $\Delta f = \frac{F_s}{N} = 1$ Hz

En observant la figure, on voit que f_0 est comprise entre 4 et 5 Hz, mais difficile d'en dire plus...

Cas d'une sinusoïde



Si on prend 10 fois plus d'échantillons, alors on se replace dans le cas 1, et il est possible d'estimer f_0 de façon précise

Ici $f_0 = 4.6$ Hz, $F_s = 100$ Hz, $N = 1000$ échantillons, donc $\Delta f = \frac{F_s}{N} = 0.1$ Hz