Traitement numérique du signal

Cours 6 : Introduction aux signaux aléatoires

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 1ère année
2017-2018

Sommaire

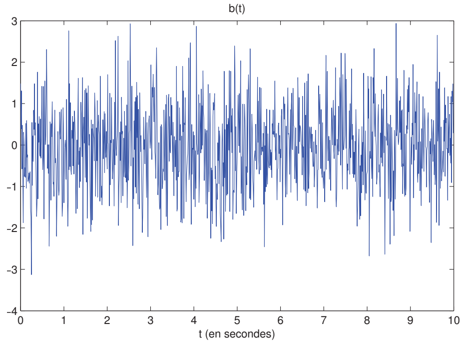
Sommaire

Qu'est-ce qu'un signal aléatoire ?

Signaux déterministes, signaux aléatoires

- Jusqu'à présent, nous disposions pour tous les signaux que nous avons étudiés d'une équation qui nous donnait l'expression de $x(t)$ en fonction de t ou x_n en fonction de n : on dit que ces signaux sont **déterministes**
- Dans la vraie vie en revanche, on ne dispose pas d'une équation pour tous les signaux !
- Certains phénomènes (les perturbations par exemple) sont a priori inconnus et aléatoires. On n'est pas capable de dire précisément les valeurs que ces signaux vont prendre, mais on sait par exemple que leur amplitude sera de tel ordre de grandeur, ou que *en général* ils auront des fréquences dans une certaine bande, etc... On dit que ces signaux sont **aléatoires**

Notion de bruit blanc

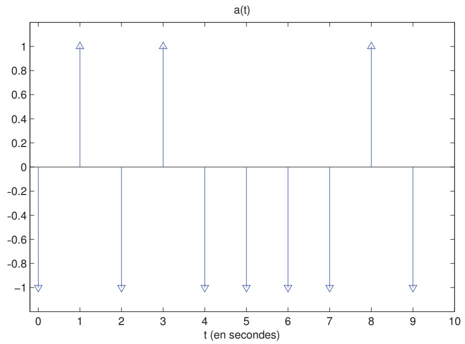


Ici $\sigma^2 = 1$

Un bruit blanc $b(t)$ est un signal aléatoire qui prend des valeurs au hasard à chaque instant t

- Les valeurs prises à chaque instant sont toutes indépendantes les unes des autres
- La moyenne de ce signal est égale à 0
- La variance du signal est égale à σ^2
- Plus σ^2 est élevé, plus le bruit blanc a tendance à prendre des valeurs éloignées de 0 et plus les amplitudes sont élevées (en valeur absolue)
- Très utilisé pour modéliser des perturbations dont on ne connaît que l'ordre de grandeur (paramétré par σ^2)

Emission de symboles aléatoires



Ici $T = 1$ seconde et $a_k = \pm 1$

On envoie un symbole a_k aléatoirement choisi dans un dictionnaire toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

- On définit un dictionnaire (par exemple $a_k = \pm 1$)
- A chaque instant $t = kT$ on envoie au hasard un symbole du dictionnaire
- Les symboles émis sont indépendants, et on suppose que chaque symbole a une même probabilité d'apparition (dans notre exemple, chacun des 2 symboles du dictionnaire a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'apparaître)
- Plus T est petit, plus les symboles sont émis rapidement

Sommaire

Densité spectrale de puissance

Transformée de Fourier ?

- Nous avons vu que pour les signaux déterministes, il était important de les étudier dans le domaine fréquentiel pour mieux comprendre leurs propriétés
- Comment faire pour un signal aléatoire ? Par définition, à chaque nouveau signal que l'on génère, on aura un signal différent et on aura une transformée de Fourier différente !
- On va définir par analogie un outil, appelé **densité spectrale de puissance (DSP)**, permettant d'observer le contenu fréquentiel d'un signal aléatoire *en moyenne*

Densité spectrale de puissance

- Pour un signal déterministe à énergie finie, on a :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

où E_x est l'énergie totale
$|X(f)|^2$ peut être vue comme une densité spectrale d'énergie

- Pour un signal aléatoire, on va définir la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$, comme la quantité vérifiant :

$$\boxed{P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df}$$

où P_x est la puissance moyenne totale

- $\Gamma_x(f)$ donne la répartition de la puissance selon les fréquences f
- Analogie entre $|X(f)|^2$ pour l'énergie dans le cas déterministe, et $\Gamma_x(f)$ pour la puissance dans le cas aléatoire

Bruit blanc

- Dans le cas d'un bruit blanc, comme tout est aléatoire et indépendant, il n'y a pas de raison qu'une fréquence ait plus d'importance que les autres. La densité spectrale de puissance est donc constante.
- Pour un bruit blanc $b(t)$ de variance σ^2, on a donc :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \sigma^2}$$

- On remarque qu'on a donc $P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 df = +\infty$! Un bruit blanc n'existe donc pas dans la réalité physique, car sa puissance moyenne totale est infinie !
- Au lieu d'utiliser σ^2, il est courant d'introduire $N_0 = 2\sigma^2$ (en Watt par Hertz) et d'écrire :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}}$$

Emissions de symboles aléatoires

- Dans le cas d'une émission de symboles aléatoires indépendants toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

On peut montrer que (hors programme)

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- μ_a et σ_a^2 sont respectivement la moyenne et la variance des symboles du dictionnaire
- Exemple : si $a_k \pm 1$, alors

$$\mu_a = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{2}((-1-0)^2 + (1-0)^2) = 1$$

Sommaire

Filtrage des signaux aléatoires

Filtrage des signaux aléatoires

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

- Dans le cas déterministe, on a $Y(f) = X(f)H(f)$
- Si l'on suppose maintenant que le signal $x(t)$ est aléatoire, que devient l'expression ?
- $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre, c'est donc une quantité déterministe dont on peut prendre la transformée de Fourier
- En revanche, $y(t)$ dépend de $x(t)$, il est donc également aléatoire !

Formule de Wiener Lee

Considérons :

- Un signal aléatoire $x(t)$ de DSP $\Gamma_x(f)$ que l'on filtre avec un filtre linéaire de fonction de transfert $H(f)$.
- Alors la DSP $\Gamma_y(f)$ de la sortie du filtre $y(t)$ vérifie la relation suivante :

$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\ \Gamma_x(f)}$$

Sommaire

Rapport signal sur bruit

Rapport signal sur bruit

- Etant donné un signal $x(t)$ déterministe corrompu par un bruit blanc additif $b(t)$, le signal bruité $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

- On appelle le rapport signal sur bruit, la quantité :

$$\boxed{SNR = \frac{P_x}{P_b}}$$

Plus cette quantité est élevée, moins le bruit n'a d'importance

- On exprime souvent cette quantité en décibels :

$$\boxed{SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_b}\right)}$$