Traitement statistique du signal

TD 2 : Processus stochastiques, stationnarité et ergodicité, processus AR, densités spectrales de puissance

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - 2ème année

2013-2014

1 Exercice 1

On considère un processus aléatoire

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

où f_0 est une constante et A et ϕ deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que A suit une loi normale centrée réduite et que ϕ est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

On rappelle que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$
$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

1. $X(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
2. $X(t)$ est-il à moyenne ergodique ?
3. On suppose maintenant que $\phi = 0$. Les affirmations précédentes sont-elles encore vraies ?

2 Exercice 2

On considère le processus AR(1) réel et stationnaire au sens large:

$$X(n) = aX(n-1) + b(n)$$

où a est un réel non nul ($|a| < 1$) et $b(n)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2.

1. Calculer l'espérance statistique $E\left\{X(n)\right\}$.
2. (a) Montrer que la fonction d'autocorrélation de $R_{XX}(k)$ vérifie la relation de récurrence suivante:
   $$\forall k > 0 \qquad R_{XX}(k) = aR_{XX}(k-1)$$
   (b) En déduire une expression de $R_{XX}(k)$ pour $k > 0$ en fonction de $R_{XX}(0)$
   (c) Généraliser cette expression pour k entier relatif.
   (d) Calculer $R_{XX}(0)$ et en déduire l'expression générale de $R_{XX}(k)$.
3. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance $S_X(f)$.

3 Exercice 3

On considère $X(t)$ un signal aléatoire ergodique et stationnaire au sens large, et

$$Y(t) = h(t) * X(t)$$

où $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre. On notera $R_{XX}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ et $S_X(f)$ sa densité spectrale de puissance.

Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{XY}(\tau)$ ainsi que la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(\tau)$ en fonction de $R_{XX}(\tau)$ et h.