Traitement statistique du signal

TD 3 : Estimateurs EMV, MAP, MQ et ELMQ, biais, variances, EMQ

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - $2^{\text{ème}}$ année

2013-2014

1 Exercice 1

Soit Z la variable aléatoire définie par:

$$Z = aX + Y$$

où a est un réel non nul et Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Le but de cet exercice est de déterminer des estimateurs de X à partir de l'observation Z.

1. On suppose que X est déterministe. Donner l'expression de l'estimateur $\hat{X}_{EMV}$ au sens du Maximum de Vraisemblance. Quel est son biais ?

2. On suppose maintenant que X est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, et que X et Y sont indépendantes.

   (a) Calculer $p(X)$ et $p(Z)$

   (b) En posant $K^2 = \frac{\sigma^2}{a^2\sigma^2+1}$, montrer que la densité de probabilité conditionnelle $p(X|Z)$ peut se mettre sous la forme:

   $$p(X|Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K^2}}\, e^{-\frac{(X-aK^2Z)^2}{2K^2}}$$

   (c) En déduire l'expression des estimateurs $\hat{X}_{MAP}$ et $\hat{X}_{MQ}$ respectivement au sens du Maximum a Posteriori et au sens de la Moyenne Quadratique.

2 Exercice 2

Soient $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_n]$ n observations i.i.d, de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, dont la densité de probabilité a pour expression:

$$p_X(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

pour $x \geq 0$ et 0 sinon. On rappelle qu'une telle loi exponentielle a pour moyenne θ et pour variance θ^2. Le but de cet exercice est de déterminer un estimateur de θ à partir des observations $\mathbf{X}$.

1. Calculer $p(\mathbf{X}|\theta)$ et en déduire l'estimateur $\hat{\theta}_{EMV}$ au sens du Maximum de Vraisemblance.

2. Calculer son biais $B(\theta)$ et son erreur quadratique moyenne $EQM\left\{\hat{\theta}\right\}$. Commenter la consistence de l'estimateur.

3 Exercice 3

Soit le modèle d'observation

$$X_k = \theta + W_k$$

où W_k est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2. On suppose que θ suit une loi uniforme sur $[-\theta_0, \theta_0]$ et que W_k et θ sont non corrélés. Le but de cet exercice est de déterminer un estimateur de θ à partir des observations $X_1, \ldots, X_n$.

1. Calculer l'estimateur linéaire de la forme $\hat{\theta}_n = \sum_{k=1}^{n} h_k X_k$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQM).

2. Montrer que

$$E\left\{(\theta - \hat{\theta}_n)\hat{\theta}_n\right\} = 0$$

   En déduire que

$$EMQ_n = E\left\{\theta^2\right\} - E\left\{\theta\hat{\theta}_n\right\}$$

3. Calculer l'erreur quadratique moyenne EQM_n