Traitement statistique du signal

TD 4 : Processus MA, filtres de Wiener causaux et non-causaux

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - 2ème année

2013-2014

1 Exercice 1

Soit $Y(n)$ l'observation donnée par

$$Y(n) = X(n) + W(n)$$

où $W(n)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 0.875$ et $X(n)$ un signal réel stationnaire au sens large. On suppose que $W(n)$ est non corrélé à $X(n)$ et que la densité spectrale de puissance de $X(n)$ s'écrit

$$S_{XX}(z) = \left(1 - 0.5z^{-1}\right)(1 - 0.5z)$$

1. Que vaut la densité spectrale de puissance $S_{XY}(z)$?
2. Calculer $S_{YY}(z)$ et la mettre sous la forme
$$S_{YY}(z) = a\left(1 - bz^{-1}\right)(1 - bz) \text{ avec } b < 1$$
3. Donner l'expression du filtre de Wiener non-causal associé à $X(n)$.
4. (a) Mettre $S_{YY}(z)$ sous la forme
$$S_{YY}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q(z^{-1})$$
où $Q(z)$ est un filtre stable et causal à minimum de phase.
   (b) Mettre le rapport $\frac{S_{XY}(z)}{Q(z^{-1})}$ sous la forme
$$\frac{S_{XY}(z)}{Q(z^{-1})} = \left(a - bz^{-1}\right) + \frac{c}{Q(z^{-1})}$$
   (c) Montrer que pour tout réel a,
$$\frac{1}{1 - az} = 1 - \frac{1}{1 - (az)^{-1}}$$
   (d) En déduire que si $|a| < 1$
$$\left[\frac{1}{1 - az}\right]_+ = 1$$
   (e) En utilisant les résultats des questions précédentes, donner l'expresion du filtre de Wiener causal associé à $X(n)$.

2 Exercice 2

On suppose que l'on dispose de n échantillons d'un signal modélisé par un processus MA(1) réel et stationnaire au sens large. On veut prédire la valeur de l'échantillon $n+1$. On notera $\{Y(k)\}_{k=-\infty \ldots n}$ le signal observé et $X(n) = Y(n+1)$ le signal que l'on veut estimer.

On notera la densité spectrale de puissance de $Y(n)$

$$S_{YY}(z) = \left(1 - \theta z^{-1}\right)(1 - \theta z) \quad \text{avec } |\theta| < 1$$

Indice : On rappelle que pour $|q| < 1$ on a

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

1. Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{XY}(k)$ en fonction de la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(k)$. En déduire le lien entre $S_{XY}(z)$ et $S_{YY}(z)$.
2. Calculer l'expression du filtre de Wiener causal associé à $X(n)$.
3. En déduire l'expression de $X(n) = \hat{Y}(n+1)$.