Traitement statistique du signal

TP 1 : Vecteurs aléatoires, processus stochastiques, stationnnarité et ergodicité

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - 2ème année

2013-2014

A préparer à la maison

Soit $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vecteur aléatoire Gaussien de dimension 2, de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu} = [1, 2]$ et de matrice d'autocovariance $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$. On considère la matrice de transformation $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = \mathbf{XA}$.

Quelle relation doivent vérifier α et β pour que les deux composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2]$ soient décorrélées ?

1 Exercice 1

On considère un vecteur aléatoire Gaussien $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_2]$ de dimension 2, de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu} = [1, 2]$ et de matrice d'autocovariance $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$. Chaque observation $\mathbf{x}(m)$ de ce vecteur aléatoire s'écrit $\mathbf{x}(m) = [\mathbf{x_1}(m), \mathbf{x_2}(m)]$ où $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ sont des vecteurs colonnes de longueur M.

1. (a) Générer $M = 1000$ observations de $\mathbf{X}$ grâce à la fonction `randn_multi.m` fournie.
   (b) Utiliser les fonctions Matlab `mean` et `cov` pour calculer la moyenne empirique et la matrice de covariance empirique de $\mathbf{X}$ associées à ces M observations et définies par

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{x}(m)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{x}(m) - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T (\mathbf{x}(m) - \hat{\boldsymbol{\mu}})$$

   (c) Relancer ensuite la même simulation avec $M = 100000$ et discuter.

2. (a) Générer $M = 1000$ observations de $\mathbf{X}$ grâce à la fonction `randn_multi.m` fournie.
   (b) Calculer un histogramme normalisé sur 100 bins à partir des M observations de la première composante $\mathbf{x_1}(m)$ grâce à la fonction `hist_norm.m` fournie.
   (c) Tracer sur la même figure cet histogramme empirique et la densité de probabilité marginale théorique de X_1.
   (d) Faire le même travail pour la deuxième composante X_2.
   (e) Relancer ensuite la même simulation avec $M = 100000$ et discuter.

3. (a) Les composantes X_1 et X_2 sont-elles corrélées ?
   (b) On considère la matrice de transformation $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = \mathbf{XA}$. Quelle relation doivent vérifier α et β pour que les deux composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2]$ soient décorrélées ?

(c) On pose $\alpha = 1$ et β vérifiant la relation déterminée à la question précédente. Calculer avec Matlab la matrice d'autocovariance théorique de $\mathbf{Y}$.

(d) Générer $M = 1000$ réalisations de $\mathbf{X}$ puis leur appliquer la transformation $\mathbf{Y} = \mathbf{XA}$.

(e) Calculer la matrice de covariance empirique de $\mathbf{Y}$ sur ces M réalisations et commenter.

(f) Relancer ensuite la même simulation avec $M = 100000$ et discuter.

2 Exercice 2

On considère la suite aléatoire

$$X(n, \xi_m) = A \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_s} + \phi\right)$$

où $f_0 = 0.5$ Hz et $F_s = 100$ Hz sont constantes, A est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. Dans la suite de l'énoncé, M désignera le nombre de réalisations (notion statistique) et N le nombre d'échantillons (notion temporelle).

1. Créer une fonction `genere_suite(M,N,f0,Fs)` qui génère M réalisations de $X(n, \xi_m)$ sur N échantillons. La sortie de cette fonction sera une matrice $\mathbf{x}$ de taille $M \times N$.

2. Générer $M = 10000$ réalisations de $X(n, \xi_m)$ sur $N = 50$ échantillons. Visualiser les trajectoires obtenues pour $n = 10, 20, 30, 40, 50$ en fonction du numéro de réalisation. Calculer pour $n = 10, 20, 30, 40, 50$ la moyenne statistique empirique:

$$E\,\{\widehat{X(n, \xi_m)}\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} x_{m,n}$$

   La suite aléatoire $X(n, \xi_m)$ est-elle stationnaire d'ordre 1 ?

3. Générer et tracer sur la même figure $M = 5$ réalisations de $X(n, \xi_m)$ sur $N = 100 \times F_s$ échantillons en fonction du temps. Calculer pour chacune de ces réalisations la moyenne temporelle empirique:

$$\langle \widehat{X(n, \xi_m)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{m,n}$$

   La suite aléatoire $X(n, \xi_m)$ est-elle ergodique d'ordre 1 ?

4. Refaire les questions 1, 2 & 3 en supposant cette fois que $\phi = 0$.