Traitement statistique du signal

TP 2 : Processus AR, estimation de DSP, estimation des paramètres AR

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - $2^{\text{ème}}$ année

2013-2014

A préparer à la maison

On considère un processus AR(2) stationnaire au sens large défini par

$$X(n) = \alpha X(n-1) + \beta X(n-2) + w(n)$$

où α et β sont des réels et $w(n)$ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2.

1. Montrer que

$$\begin{cases} R_{XX}(0) - \alpha R_{XX}(1) - \beta R_{XX}(2) & = & \sigma^2 \\ R_{XX}(1) - \alpha R_{XX}(0) - \beta R_{XX}(1) & = & 0 \\ R_{XX}(2) - \alpha R_{XX}(1) - \beta R_{XX}(0) & = & 0 \end{cases}$$

   Ecrire ce système sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{XX}(0) \\ R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer par récurrence que

$$\forall k > 2 \quad R_{XX}(k) = \alpha R_{XX}(k-1) + \beta R_{XX}(k-2)$$

3. Montrer que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{XX}(0) \\ R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{pmatrix}$$

1 Exercice 1

On considère un processus AR(2) défini de la façon suivante:

$$X(-1) = X(0) = 0$$

$$\forall n > 0 \quad X(n) = \alpha X(n-1) + \beta X(n-2) + w(n)$$

où α et β sont des réels et $w(n)$ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2.

1. (a) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ de ce processus.
   (b) En utilisant la fonction Matlab `filter`, créer une fonction `genere_AR(alpha,beta,sigma2,M,N)` qui renvoie une matrice de taille $M \times N$ contenant M réalisations du processus $X(n)$ sur N points.
   (c) On pose $\alpha = -0.6$, $\beta = 0.2$ et $\sigma^2 = 0.01$. Générer et visualiser sur la même figure $M = 5$ réalisations de $X(n)$ sur $N = 100000$ points. Discuter l'ergodicité et la stationnarité du processus.

2. On suppose $X(n)$ stationnaire au sens large.

(a) Montrer que

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_{XX}(0) - \alpha R_{XX}(1) - \beta R_{XX}(2) & = & \sigma^2 \\ R_{XX}(1) - \alpha R_{XX}(0) - \beta R_{XX}(1) & = & 0 \\ R_{XX}(2) - \alpha R_{XX}(1) - \beta R_{XX}(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Ecrire ce système sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{XX}(0) \\ R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer par récurrence que

$$\forall k > 2 \quad R_{XX}(k) = \alpha R_{XX}(k-1) + \beta R_{XX}(k-2)$$

(c) A partir des résultats des deux questions précédentes, créer une fonction `xcorr_AR(alpha,beta,sigma2,N)` qui renvoie les valeurs théoriques de la fonction d'autocorrélation de $X(n)$ sous la forme d'un vecteur de taille $2N-1$.

(d) Générer sur $N = 1000$ points une réalisation du processus AR(2) précédemment défini ($\alpha = -0.6$, $\beta = 0.2$ et $\sigma^2 = 0.01$).

(e) Tracer sur la même figure l'estimation de sa fonction d'autocorrélation générée grâce à la fonction Matlab `xcorr` et la fonction d'autocorrélation théorique donnée par `xcorr_AR`. Commenter.

(f) Tester les options`biased` et `unbiased` de la fonction `xcorr` et discuter.

(g) Relancer la simulation pour $N = 100000$ et commenter.

3. Deux techniques classiques pour estimer la densité spectrale de puissance dans des séries numériques sont le périodogramme (à partir du signal) et le corrélogramme (à partir de la fonction d'autocorrélation). On fournit les fonctions `periodogramme.m` et `correlogramme.m` permettant de les calculer.

   (a) Générer sur $N = 1000$ points une réalisation du processus AR(2) précédemment défini ($\alpha = -0.6$, $\beta = 0.2$ et $\sigma^2 = 0.01$) puis calculer une estimation biaisée de sa fonction d'autocorrélation grâce à la fonction Matlab `xcorr`.

   (b) Calculer le périodogramme et le corrélogramme sur N_{fft}=1024 points.

   (c) Calculer la densité spectrale de puissance théorique du processus grâce à la fonction Matlab `freqz`. (On fera attention a bien renormaliser par σ^2).

   (d) Tracer sur la même figure le périodogramme et la densité spectrale de puissance théorique, puis le corrélogramme et la densité spectrale de puissance théorique. Commenter.

   (e) Relancer la simulation pour $N = 100000$ et discuter.

4. (a) A partir des équations de la question 2.a, montrer que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{XX}(0) \\ R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{pmatrix}$$

   (b) Grâce à ce résultat, écrire une fonction `estime_AR` qui prend en entrée une réalisation `X` du processus $X(n)$ et renvoie une estimation de α, β et σ^2. On utilisera pour cela l'estimateur biaisé de la fonction d'autocorrélation.

   (c) Générer sur $N = 1000$ points une réalisation du processus AR précédemment défini ($\alpha = -0.6$, $\beta = 0.2$ et $\sigma^2 = 0.01$) et estimer α, β et σ^2 grâce à la fonction précédente. Commenter. Relancer la simulation pour $N = 100000$ et discuter.